

# Problema 5a

by [fernandopaim@paim.pro.br](mailto:fernandopaim@paim.pro.br)

Resolva o sistema linear por escalonamento  $S = \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$

## Resolução

Utilizaremos quatro métodos para ilustrar a resolução do sistema linear acima.

São eles:

1. Método da Substituição
2. Regra de Cramer
3. Escalonamento
4. Eliminação de Gauss (pivotamento)

### 1-Método da Substituição

Nesse método de resolução, uma vez que dispomos de três equações e três incógnitas, isola-se o valor de uma incógnita em uma das equações e substitui-se esse valor nas outras duas equações. Dessa forma, ficamos com um sistema de duas equações e duas incógnitas, o qual poderá ser mais facilmente resolvido. Após se achar o valor dessas duas incógnitas, faz-se o retorno em qualquer equação do sistema, que contenha a terceira incógnita, para calculá-la.

O sistema dado apresenta as seguintes equações:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 && \text{eq.1} \\ x - y + z &= -1 && \text{eq.2} \\ 2x + y - 3z &= 2 && \text{eq.3} \end{aligned}$$

Vamos isolar o valor de **x** na **eq.1**

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \rightarrow \\ x &= 1 - y + z && \text{eq.4} \end{aligned}$$

Agora, substituímos o valor de **x**, encontrado na **eq.4** acima, nas equações **eq.2** e **eq.3**.

Substituindo na eq.2, temos:

$$\begin{aligned} \text{eq2.}: & (1 - y + z) - y + z = -1 \\ \text{eq2.}: & 1 - y + z - y + z = -1 \\ \text{eq2.}: & 1 - 2y + 2z = -1 \\ \text{eq2.}: & -2y + 2z = -2 \end{aligned} \quad \text{eq.5}$$

Substituindo na eq.3, temos:

$$\begin{aligned} \text{eq3.}: & 2(1 - y + z) + y - 3z = 2 \\ \text{eq3.}: & 2 - 2y + 2z + y - 3z = 2 \\ \text{eq3.}: & -y - z = 0 \end{aligned} \quad \text{eq.6}$$

Agora nosso sistema está composto pelas seguintes equações (eq.5 e eq.6 acima):

$$\begin{aligned} -2y + 2z &= -2 \\ -y - z &= 0 \end{aligned}$$

Para solucionar o sistema, basta aplicar o método da substituição nesse sistema. Vamos isolar o valor de  $y$  na equação eq.6.

$$\begin{aligned} \text{eq.6.}: & -y - z = 0 \\ \text{eq.6.}: & -y = +z \text{ ou} \\ \text{eq.6.}: & y = -z \end{aligned} \quad \text{eq.7}$$

Agora, fazemos a substituição desse valor de  $y$  na equação eq.5. e assim, achamos o valor da incógnita  $z$ . Veja:

$$\begin{aligned} \text{eq.5.}: & -2y + 2z = -2 \\ \text{eq.5.}: & -2(-z) + 2z = -2 \\ \text{eq.5.}: & 2z + 2z = -2 \\ \text{eq.5.}: & 4z = -2 \\ \text{eq.5.}: & z = -2/4 \\ \text{eq.5.}: & z = -1/2 \end{aligned}$$

Ok, agora, uma vez que o valor da variável  $z$  é conhecido, usando qualquer equação que tenha apenas  $z$  e  $y$  como incógnitas, pode-se calcular o valor de  $y$ . Por simplicidade de cálculo vamos usar a equação **eq.7**, que diz que:

$$y = -z$$

assim,

$$\begin{aligned} y &= -(-1/2) \\ y &= +1/2 \end{aligned}$$

Uma vez conhecidos os valores das variáveis  $y$  e  $z$ , podemos calcular o valor da última incógnita do sistema, a variável  $x$ . Basta pegar qualquer equação

que contenha as três variáveis. Vamos utilizar a equação **eq.4** que diz que:

$$x = 1 - y + z$$

fazendo as substituições de valores, temos:

$$x = 1 - (1/2) + (-1/2)$$

$$x = 1 - 1/2 - 1/2$$

$$x = 1 - 1$$

$$x = 0$$

Agora podemos escrever o vetor solução do sistema: **S = {0, 1/2, -1/2}**

## 2-Regra de Cramer

A solução de sistemas lineares pela Regra de Cramer utiliza o cálculo de determinantes da seguinte forma:

$$S = \left\{ x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \right\}$$

onde,

D é o determinante dos coeficientes das incógnitas.

D<sub>x</sub>, D<sub>y</sub> e D<sub>z</sub> é o determinante que se obtém a partir de D, substituindo-se a coluna dos coeficientes relativos à incógnita pela coluna dos termos independentes.

A partir das equações do sistema dado escrevemos o determinante dos coeficientes das incógnitas:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante D

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (1 \cdot -1 \cdot -3) + (1 \cdot 1 \cdot 2) + (-1 \cdot 1 \cdot 1) - \{(-1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot -3)\}$$

$$D = (3) + (2) + (-1) - \{(2) + (1) + (-3)\}$$

$$D = 3 + 2 - 1 - \{2 + 1 - 3\}$$

$$D = 4 - \{0\}$$

D = 4, logo o sistema é possível e tem uma única solução.

### Calculando Dx

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Dx = (1 \cdot -1 \cdot -3) + (1 \cdot 1 \cdot 2) + (-1 \cdot -1 \cdot 1) - \{(-1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 1) + (1 \cdot -1 \cdot -3)\}$$

$$Dx = (3) + (2) + (1) - \{(2) + (1) + (3)\}$$

$$Dx = 3 + 2 + 1 - \{2 + 1 + 3\}$$

$$Dx = 6 - \{6\}$$

$$Dx = 0$$

### Calculando Dy

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$Dy = (1 \cdot -1 \cdot -3) + (1 \cdot 1 \cdot 2) + (-1 \cdot 1 \cdot 2) - \{(-1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot -3)\}$$

$$Dy = (3) + (2) + (-2) - \{(2) + (2) + (-3)\}$$

$$Dy = 3 + 2 - 2 - \{2 + 2 - 3\}$$

$$Dy = 3 - \{1\}$$

$$Dy = 2$$

### Calculando Dz

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$Dz = (1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot 1 \cdot 1) - \{(1 \cdot -1 \cdot 2) + (1 \cdot -1 \cdot 1) + (1 \cdot 1 \cdot 2)\}$$

$$Dz = (-2) + (-2) + (1) - \{(-2) + (-1) + (2)\}$$

$$Dz = -2 - 2 + 1 - \{-2 - 1 + 2\}$$

$$Dz = -3 - \{-1\}$$

$$Dz = -3 + 1$$

$$Dz = -2$$

Calculando cada uma das variáveis temos:

$$S = \left\{ x = \frac{Dx}{D}, y = \frac{Dy}{D}, z = \frac{Dz}{D} \right\}$$

$$S = \left\{ \frac{0}{4}, \frac{2}{4}, -\frac{2}{4} \right\}$$

$$S = \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$$

### 3-Escalonamento

A resolução de sistemas lineares pela por Escalonamento consiste em aplicar operações de combinação linear entre as linhas e troca de posição de linhas de forma a obter uma matriz triangular superior.

O método de escalonamento deve ser aplicado na matriz expandida do sistema, isto é, a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas juntamente com a coluna dos termos independentes.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ \text{No sistema dado por } S = \quad x - y + z &= -1 \\ 2x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

A matriz expandida é dada por

$$M = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right\|$$

e o processo do escalonamento consiste em transformar a matriz expandida do sistema em uma matriz triangular superior da seguinte forma:

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{array} \right\| \text{ onde } a, b, c, d, e, f, g, i \text{ são valores numéricos. Observamos}$$

então que, a metodologia consistirá em transformar os valores abaixo da diagonal principal em zeros.

Escalonando...

Observemos que, se multiplicarmos a segunda linha por -1 e somarmos à primeira linha, conseguimos gerar o primeiro valor nulo na posição 2,2. Então vamos aplicar a primeira combinação linear sobre a segunda linha.

$$\text{Façamos } L2 = (-1) \cdot L2 + L1.$$

$$L2 = (-1)*L2 + L1$$

$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	$a_{21}=(-1)*a_{21} + a_{11}$ $a_{21}=(-1)*1 + 1$ $a_{21}=-1 + 1$ $a_{21}=0$	$a_{22}=(-1)*a_{22} + a_{12}$ $a_{22}=(-1)*-1 + 1$ $a_{22}=1 + 1$ $a_{22}=2$
$a_{23}=(-1)*a_{23} + a_{13}$ $a_{23}=(-1)*1 + (-1)$ $a_{23}=-1 - 1$ $a_{23}=-2$	$a_{24}=(-1)*a_{24} + a_{14}$ $a_{24}=(-1)*-1 + 1$ $a_{24}=1 + 1$ $a_{24}=2$	após L2...  $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

Ok, já conseguimos que “zerar” o elemento  $a_{21}$ . Agora vamos trabalhar com o elemento  $a_{31}$ . Observemos que, se multiplicarmos a primeira linha por -2 e somarmos o resultado com a terceira linha, iremos obter  $a_{31}=0$ .

Assim, fazemos então  $L3 = (-2)*L1 + L3$

$L3 = (-2)*L1 + L3$		
$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	$a_{31}=(-2)*a_{11} + a_{31}$ $a_{31}=(-2)*1 + 2$ $a_{31}=-2 + 2$ $a_{31}=0$	$a_{32}=(-2)*a_{12} + a_{32}$ $a_{32}=(-2)*1 + (1)$ $a_{32}=-2 + 1$ $a_{32}=-1$
$a_{33}=(-2)*a_{13} + a_{33}$ $a_{33}=(-2)*-1 + (-3)$ $a_{33}=2 - 3$ $a_{33}=-1$	$a_{34}=(-2)*a_{14} + a_{34}$ $a_{34}=(-2)*1 + (2)$ $a_{34}=-2 + 2$ $a_{34}=0$	após L3...  $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

Ok, quase lá... Note que, falta apenas “zerar” o elemento  $a_{32}$  para completar o escalonamento. Observemos que, se dividirmos a segunda linha por 2 e somarmos o resultado com a terceira linha, iremos obter  $a_{32}=0$ .

Assim, fazemos então  $L3 = L2/2 + L3$

$L3 = L2/2 + L3$		
$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$	$a_{31}=a_{21}/2 + a_{31}$ $a_{31}=0/2 + 0$ $a_{31}=0 + 0$ $a_{31}=0$	$a_{32}=a_{22}/2 + a_{32}$ $a_{32}=2/2 + (-1)$ $a_{32}=1 - 1$ $a_{32}=0$
$a_{33}=a_{23}/2 + a_{33}$ $a_{33}=-2/2 + (-1)$ $a_{33}=-1 - 1$	$a_{34}=a_{24}/2 + a_{34}$ $a_{34}=2/2 + 0$ $a_{34}=1 + 0$	após L3...

$$L3 = L2/2 + L3$$

$$a_{33} = -2$$

$$a_{34} = 1$$

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Agora, é só reescrever as equações do sistema a partir da matriz triangular superior. Vejamos:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= -2 \\ -2z &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo,

$$\begin{aligned} -2z &= 1 \\ z &= -1/2 \end{aligned}$$

substituindo o valor calculado para **z** acima na segunda equação, temos:

$$\begin{aligned} -2y + 2z &= -2 \\ -2y + 2(-1/2) &= -2 \\ -2y - 1 &= -2 \\ -2y &= -1 \\ 2y &= 1 \\ y &= 1/2 \end{aligned}$$

substituindo os valores de **y** e **z** na primeira equação, podemos calcular o valor de **x**.

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) &= 1 \\ x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= 1 \\ x + 1 &= 1 \\ x &= 1 - 1 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

E o vetor solução do sistema é  $S = \{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$

### **Método de Eliminação de Gauss (pivotamento)**

Esse método apresenta um algoritmo que poderá ser facilmente implementado em uma linguagem de programação. Veja abaixo a sistemática do método.

Inicialmente, deve-se transcrever o sistema na forma matricial, mais especificamente na forma de um produto de matrizes. É bem simples. Uma das matrizes é constituída pelos coeficientes das variáveis, a segunda matriz

é constituída pelas variáveis e, a terceira matriz é constituída pelos termos independentes. Veja abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### Criando a matriz expandida

O passo seguinte é criar a **matriz expandida** que é constituída pelos elementos da matriz dos coeficientes e pelos elementos da matriz dos termos independentes. Veja abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

É sobre a matriz expandida que o método do pivotamento é aplicado.

### Eliminação de Gauss

A partir da *matriz expandida* aplica-se o método de eliminação de Gauss.

Veja abaixo:

**Fase 1:** Escolhe-se a linha que contenha o primeiro elemento da primeira coluna, diferente de zero. Caso o primeiro elemento seja nulo deve-se realizar a troca das linhas. As outras linhas permanecem onde estão. No exemplo, o elemento  $a_{11}$  é igual a 1 e portanto será utilizado. Esse valor passa a ser conhecido como **pivô** dessa fase. Todas as operações levarão em conta esse valor, daí o nome do método de pivotamento.

A matriz expandida fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Triangularização L2:** aplica-se a sentença aritmética:  $L2 = L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} * L1$

#### Fase 1: Triangularização L2

$$L2 = L2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} * L1$$

$$a_{21} = a_{21} - \frac{a_{21}}{a_{11}} * a_{11}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= 1 - (1/1) * 1 \\ a_{21} &= 1 - (1) * 1 \end{aligned}$$



### Fase 1: Triangularização L2

		$a_{21} = 1 - (1)$ $a_{21} = 1 - 1$ $a_{21} = 0$
	$a_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} * a_{12}$	$a_{22} = -1 - (1/1)*1$ $a_{22} = -1 - (1)*1$ $a_{22} = -1 - (1)$ $a_{22} = -1 - 1$ $a_{22} = -2$
	$a_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} * a_{13}$	$a_{23} = 1 - (1/1)*-1$ $a_{23} = 1 - (1)*-1$ $a_{23} = 1 - (-1)$ $a_{23} = 1 + 1$ $a_{23} = 2$
	$a_{24} = a_{24} - \frac{a_{21}}{a_{11}} * a_{14}$	$a_{24} = -1 - (1/1)*1$ $a_{24} = -1 - (1)*1$ $a_{24} = -1 - (1)$ $a_{24} = -1 - 1$ $a_{24} = -2$

**Triangularização L3:** aplica-se a sentença aritmética:  $L3 = L3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} * L1$

### Fase 1: Triangularização L3

$L3 = L3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} * L1$	$a_{31} = a_{31} - \frac{a_{31}}{a_{11}} * a_{11}$	$a_{31} = 2 - (2/1)*1$ $a_{31} = 2 - (2)*1$ $a_{31} = 2 - (2)$ $a_{31} = 2 - 2$ $a_{31} = 0$
	$a_{32} = a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} * a_{12}$	$a_{32} = 1 - (2/1)*1$ $a_{32} = 1 - (2)*1$ $a_{32} = 1 - (2)$ $a_{32} = 1 - 2$ $a_{32} = -1$
	$a_{33} = a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} * a_{13}$	$a_{33} = -3 - (2/1)*-1$ $a_{33} = -3 - (2)*-1$ $a_{33} = -3 - (-2)$ $a_{33} = -3 + 2$ $a_{33} = -1$
	$a_{34} = a_{34} - \frac{a_{31}}{a_{11}} * a_{14}$	$a_{34} = 2 - (2/1)*1$ $a_{34} = 2 - (2)*1$ $a_{34} = 2 - (2)$

### Fase 1: Triangularização L3

$$a_{34} = 2 - 2$$

$$a_{34} = 0$$

Assim, após as triangularizações L2 e L3 a matriz expandida fica da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Ok, a fase 1 encerra a primeira parte do escalonamento e a linha 1 já está pronta e não mais sofrerá operações. Resta ainda a segunda e a terceira linhas.

**Fase 2:** O elemento  $a_{22}=-2$  e portanto diferente de 0 é o escolhido como sendo o segundo pivô. Repete-se o processo de triangularização realizado acima.

### Fase 2: Triangularização L3

$L3 = L3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} * L2$	$a_{31} = a_{31} - \frac{a_{32}}{a_{22}} * a_{21}$	$a_{31} = 0 - (-1/-2) * 0$ $a_{31} = 0 - (1/2) * 0$ $a_{31} = 0 - (0)$ $a_{31} = 0 - 0$ $a_{31} = 0$
	$a_{32} = a_{32} - \frac{a_{32}}{a_{22}} * a_{22}$	$a_{32} = -1 - (-1/-2) * -2$ $a_{32} = -1 - (1/2) * -2$ $a_{32} = -1 - (-2/2)$ $a_{32} = -1 + 1$ $a_{32} = 0$
	$a_{33} = a_{33} - \frac{a_{32}}{a_{22}} * a_{23}$	$a_{33} = -1 - (-1/-2) * 2$ $a_{33} = -1 - (1/2) * 2$ $a_{33} = -1 - (2/2)$ $a_{33} = -1 - (1)$ $a_{33} = -1 - 1$ $a_{33} = -2$
	$a_{34} = a_{34} - \frac{a_{32}}{a_{22}} * a_{24}$	$a_{34} = 0 - (-1/-2) * -2$ $a_{34} = 0 - (1/2) * -2$ $a_{34} = 0 - (-2/2)$ $a_{34} = 0 + 1$ $a_{34} = 1$

Desse modo, após a fase 2, a matriz apresenta-se da seguinte forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ok, o sistema está escalonado. Reescrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Dessa forma, o sistema proposto foi transformado no seguinte sistema equivalente:

$$\begin{vmatrix} x+y-z=1 \\ 0x-2y+2z=-2 \\ 0x+0y-2z=1 \end{vmatrix} \text{ isto é,}$$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -2y + 2z &= -2 \\ -2z &= 1 \end{aligned}$$

Assim,

$$-2z = 1 \text{ portanto } z = -1/2$$

substituindo esse valor de z na equação  $-2y + 2z = -2$ , temos:

$$\begin{aligned} -2y + 2z &= -2 \\ -2y + 2*(-1/2) &= -2 \\ -2y - 2/2 &= -2 \\ -2y - 1 &= -2 \\ -2y &= -2 + 1 \\ -2y &= -1 \text{ portanto } y = 1/2 \end{aligned}$$

finalmente, substituindo os valores de y e z na equação  $x + y - z = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + 1/2 - (-1/2) &= 1 \\ x + 1/2 + 1/2 &= 1 \\ x + 1 &= 1 \text{ portanto } x = 0 \end{aligned} \quad \text{Assim, } S = \{0, 1/2, -1/2\}$$

*That's All Folks!*

**by fernandopaim@paim.pro.br**