Problema 1

Calcular a matriz inversa da matriz A = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Resolução

Bom, para se resolver exercícios que envolvem o cálculo de matrizes inversas é necessário partir de algumas definições básicas. Assim, há duas restrições que uma dada matriz deverá obedecer para que seja possível calcular a sua inversa. Essas duas restrições são:

1. Matrizes inversas só são definidas para matrizes quadradas.
2. Para que exista a matriz inversa de uma dada matriz, o determinante dessa matriz dada deverá ser diferente de zero.

No caso do exemplo acima, a matriz **A** é de ordem **3x3**, isto é, trata-se de uma matriz <u>quadrada</u>. Dessa forma, a primeira restrição acima é satisfeita. Para verificar se a matriz satisfaz a segunda condição é necessário calcular o seu determinante.

Calculando o determinante da matriz dada

A = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

aplicando a “regra de Sarrus” para o cálculo de determinantes de terceira ordem, temos:

Det(A) = $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

efetuando os cálculos, temos:

Det(A) = (-2*1*1) + (0*-1*1) + (0*1*0) – (0*1*1) - (-2*-1*0) - (0*1*1)

Det(A) = (-2) + (0) + (0) - (0) - (0) - (0)

Det(A) = -2

logo, $\boxed{\text{Det(A) = -2}}$

Assim, uma vez que o determinante da matriz dada é -2 e portanto, diferente de zero, logo existe a matriz inversa.

Calculando a matriz inversa

A notação da inversa de uma dada matriz A é dada por A^{-1}

A matriz inversa é dada por: $A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(A)} \cdot [\mathrm{Cof}(A)]^t$

onde,

- A^{-1} é a matriz inversa.
- Det(A) é o determinante da matriz dada. Já calculado acima e vale 9.
- Cof(A) é a matriz dos co-fatores da matriz dada.
- A letra t indica que deve-se tomar a matriz transposta da matriz dos co-fatores de A.

Matriz dos Co-fatores

Chama-se matriz dos co-fatores de uma dada matriz **A**, e indica-se por **Cof(A)**, a matriz que se obtém a partir da matriz **A**, substituindo-se cada elemento de **A** pelo seu respectivo co-fator. Muito bem! e o que é co-fator de um elemento??

Co-fator de um elemento

O co-fator de um elemento de uma dada matriz A é dado por: $\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}.\mathrm{Det}(R_{ij})$

onde,

- a_{ij} é o elemento do qual se deseja calcular o co-fator
- i é a linha do elemento a_{ij}
- j é a coluna do elemento a_{ij}
- R_{ij} é a **matriz reduzida** que se obtém a partir da matriz dada A suprimindo-se a linha i e a coluna j do elemento a_{ij}. *Note que, o valor importante aqui não é a matriz reduzida em si mas, o seu determinante.*

Calculando os co-fatores dos elementos

Do exposto acima, vamos calcular os co-fatores dos elementos da matriz:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a definição de co-fator, cof(a_{ij}) = $(-1)^{i+j}$.Det(R_{ij}), para cada um dos elemento da matriz, temos:

R(a_{11})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{11}) = $(-1)^{1+1}$ * Det(R_{11}) Cof(a_{11}) = $(-1)^{2}$ { (1 * 1) - (-1 * 0) } Cof(a_{11}) = 1 * { (1) – (0) } Cof(a_{11}) = { 1 – 0 } Cof(a_{11}) = 1
R(a_{12})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{12}) = $(-1)^{1+2}$ * Det(R_{12}) Cof(a_{12}) = $(-1)^{3}$ * { (1 * 1) - (-1 * 1) } Cof(a_{12}) = -1 * { (1) – (-1) } Cof(a_{12}) = -1 * {(1+1)} Cof(a_{12}) = -1 * {2} Cof(a_{12}) = -2
R(a_{13})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	Cof(a_{13}) = $(-1)^{1+3}$ * Det(R_{13}) Cof(a_{13}) = $(-1)^{4}$ * { (1 * 0) - (1 * 1) } Cof(a_{13}) = 1 * { (0) – (1) } Cof(a_{13}) = 1 * { -1 } Cof(a_{13}) = -1
R(a_{21})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{21}) = $(-1)^{2+1}$ * Det(R_{21}) Cof(a_{21}) = $(-1)^{3}$ * { (0 * 1) – (0 * 0) } Cof(a_{21}) = -1 * { (0) – (0) } Cof(a_{21}) = -1 * {0} Cof(a_{21}) = -1 * 0 Cof(a_{21}) = 0
R(a_{22})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{22}) = $(-1)^{2+2}$ * Det(R_{22}) Cof(a_{22}) = $(-1)^{4}$ * { (-2 * 1) – (0 * 1) } Cof(a_{22}) = 1 * { (-2) – (0) } Cof(a_{22}) = 1 * { -2 – 0 } Cof(a_{22}) = 1 * { -2 } Cof(a_{22}) = -2
R(a_{23})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	Cof(a_{23}) = $(-1)^{2+3}$ * Det(R_{23}) Cof(a_{23}) = $(-1)^{5}$ * { (-2 * 0) - (0 * 1) } Cof(a_{23}) = -1 * { (0) – (0) } Cof(a_{23}) = -1 * { 0 } Cof(a_{23}) = -1 * 0 Cof(a_{23}) = 0
R(a_{31})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{31}) = $(-1)^{3+1}$ * Det(R_{31}) Cof(a_{31}) = $(-1)^{4}$ * (0 * -1) - (0 * 1) Cof(a_{31}) = 1 * {(0) – (-0)} Cof(a_{31}) = 1 * (0 - 0) Cof(a_{31}) = 1 * 0 Cof(a_{31}) = 0
R(a_{32})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{32}) = $(-1)^{3+2}$ * Det(R_{32}) Cof(a_{32}) = $(-1)^{5}$ * { (-2 * -1) - (0 * 1) } Cof(a_{32}) = -1 * { (+2) – (0) } Cof(a_{32}) = -1 * { 2 – 0 }

			Cof(a_{32}) = -1 * (2) Cof(a_{32}) = -2
R(a_{33})	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	Cof(a_{33}) = $(-1)^{3+3}$ * Det(R_{32}) Cof(a_{33}) = $(-1)^{6}$ * { (-2 * 1) - (0 * 1) } Cof(a_{33}) = 1 * { (-2) – (0) } Cof(a_{33}) = 1 * { -2 } Cof(a_{33}) = 1 * (-2) Cof(a_{33}) = -2

Criando a Matriz dos co-fatores

Ok, uma vez que todos os co-fatores dos elementos foram calculados, pode-se escrever a matriz dos cofatores.

Veja abaixo:

Matriz dos co-fatores da matriz dada A:

$$\text{Cof(A)} = \begin{matrix} cof(a11) & cof(a12) & cof(a13) \\ cof(a21) & cof(a22) & cof(a23) \\ cof(a31) & cof(a32) & cof(a33) \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{matrix}$$

Note que, na expressão $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot [\text{Cof}(A)]^{t}$ usada para se calcular os elementos da matriz inversa $\mathbf{A^{-1}}$, o fator importante é a transposta da matriz dos co-fatores e não propriamente a matriz dos co-fatores. Lembramos que a transposta de uma dada matriz é obtida trocando-se linhas por colunas. Assim sendo,

$$\text{Cof(A)}^{t} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Para obter a matriz inversa basta dividir todos os elementos pelo determinante da matriz dada A, Det(A)=-2.

Assim:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/-2 & 0/-2 & 0/-2 \\ -2/-2 & -2/-2 & -2/-2 \\ -1/-2 & 0/-2 & -2/-2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0 & 1 \end{matrix}$$

que é a solução do problema.

Para se certificar-se de que a resposta encontrada está correta, basta multiplicar essa matriz pela matriz dada. O produto deverá apresentar como resultado a matriz identidade de ordem 3. Essa prova ficará como atividade pra você fazer.

Apêndice:

Veja abaixo, todas as matrizes reduzidas da matriz dada.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

That's All Folks!

by fernandopaim@paim.pro.br