<u>**Calculando limites com o interpretador Hall.**</u>

Problema

Seja, por exemplo, calcular o valor do limite da expressão: **f(x) = x^2 -5x +3** quando **x** tender a 5, isto é x -> 5.

Considerações

Fazendo a substituição do valor 5 na expressão de **f(x)**, encontramos como resultado o valor **f(1) = 3**. Isto significa que, o limite de **f(x)** quando **x** tende a **5** é **3**. Ok, esse é um exemplo didático de fácil solução algébrica mas, nem sempre os problemas são assim tão fáceis. Por outro lado, o propósito do problema é desenvolver um algoritmo que nos dê uma idéia do valor do limite de **f(x)** quando **x** tende a 5. (e não resolvê-lo analiticamente).

Solução

A solução consistirá então em fazermos x se aproximar do valor 5 e calcular o valor de f(x) para sabermos o que está acontecendo com a função. Há duas formas de fazer x tender a 1:

- Podemos partir de valores que são maiores que 5 e ir decrementando até valores muito próximos de 1, senão o próprio 5 inclusive. Esse processo é conhecido como "<u>limite à direita</u>".
- Por outro lado, podemos partir de valores que são menores que 5 e ir incrementando até valores muito próximos de 1, até o próprio 5, inclusive. Esse processo é conhecido como "<u>limite à esquerda</u>".

Uma pergunta

Por que podemos incluir o valor 5 em nossa lista de números para tentar se calcular o valor do limite de f(x) ?

O algoritmo

Bom, iremos desenvolver os dois algoritmos e analisar os resultados gerados. Há um teorema do cálculo que diz que: "se os limites a esquerda e a direita existirem e forem iguais, então o limite da função existe e é dado pelo valor encontrado".

Abaixo está o programa que faz x tender a 5 pela direita, isto é, partimos de valores que são maiores que 5 e decrementamos até se aproximar de 5. Aqui cabe uma pergunta, <u>**Que valor de decremento utilizar ?**</u> Em nosso exemplo utilizamos **0.2**. A resposta a essa pergunta envolve considerações de <u>precisão</u> nos resultados mas, não é o nosso caso neste exemplo simples.

Veja o código abaixo:

```
algoritmo()
{
	real L;		// o valor do limite
	real x;		// a variavel independente

	para (x:=8 ate 4 decr 0.2)
	{
		L := potencia(x,2) -5*x + 3;
		escreva("para x = ",x," => f(x) = ",L);
	}
}
```

Abaixo pode-se ver a tela de execução do algoritmo acima:

Observe que, quando o x assume o valor 5, o valor de f(x) é 3.

```
para x = 8.000000 => f(x) = 2.700000E+01
para x = 7.800000 => f(x) = 2.484000E+01
para x = 7.600000 => f(x) = 2.276000E+01
para x = 7.400000 => f(x) = 2.076000E+01
para x = 7.200000 => f(x) = 1.884000E+01
para x = 7.000000 => f(x) = 1.700000E+01
para x = 6.800000 => f(x) = 15.240000
para x = 6.600000 => f(x) = 13.560000
para x = 6.400000 => f(x) = 11.960000
para x = 6.200000 => f(x) = 10.440000
para x = 6.000000 => f(x) = 9.000000
para x = 5.800000 => f(x) = 7.640000
para x = 5.600000 => f(x) = 6.360000
para x = 5.400000 => f(x) = 5.160000
para x = 5.200000 => f(x) = 4.040000
para x = 5.000000 => f(x) = 3.000000
para x = 4.800000 => f(x) = 2.040000
para x = 4.600000 => f(x) = 1.160000
para x = 4.400000 => f(x) = 0.360000
para x = 4.200000 => f(x) = -0.360000
---------------------------------------------
# fim de execucao, tecle [ENTER] para continuar...
```

Bom, abaixo está o programa que faz a aproximação pela esquerda, isto é, por valores que são menores que 5.

Veja:

```
algoritmo()
{
	real L;		// o valor do limite
	real x;		// a variavel independente

	para (x:=0 ate 6 decr 0.2)
	{
		L := potencia(x,2) -5*x + 3;
		escreva("para x = ",x," => f(x) = ",L);
	}
}
```

E abaixo está a tela de execução do programa, acompanhe...

```
para x = 0.000000 => f(x) = 3.000000
para x = 0.200000 => f(x) = 2.040000
para x = 0.400000 => f(x) = 1.160000
para x = 0.600000 => f(x) = 0.360000
para x = 0.800000 => f(x) = -0.360000
para x = 1.000000 => f(x) = -1.000000
para x = 1.200000 => f(x) = -1.560000
para x = 1.400000 => f(x) = -2.040000
para x = 1.600000 => f(x) = -2.440000
para x = 1.800000 => f(x) = -2.760000
para x = 2.000000 => f(x) = -3.000000
para x = 2.200000 => f(x) = -3.160000
para x = 2.400000 => f(x) = -3.240000
para x = 2.600000 => f(x) = -3.240000
para x = 2.800000 => f(x) = -3.160000
para x = 3.000000 => f(x) = -3.000000
para x = 3.200000 => f(x) = -2.760000
para x = 3.400000 => f(x) = -2.440000
para x = 3.600000 => f(x) = -2.040000
para x = 3.800000 => f(x) = -1.560000
para x = 4.000000 => f(x) = -1.000000
para x = 4.200000 => f(x) = -0.360000
para x = 4.400000 => f(x) = 0.360000
para x = 4.600000 => f(x) = 1.160000
para x = 4.800000 => f(x) = 2.040000
para x = 5.000000 => f(x) = 3.000000
para x = 5.200000 => f(x) = 4.040000
para x = 5.400000 => f(x) = 5.160000
para x = 5.600000 => f(x) = 6.360000
para x = 5.800000 => f(x) = 7.640000
-------------------------------------
# fim de execucao, tecle [ENTER] para
```

Análise

Bom esse é um exemplo simples e podemos ver que o limite para f(x) quando x tende a 5 é 3, como esperado. Note que, a execução dos dois programas (limites à esquerda e à direita) retornaram o mesmo valor para f(x) quando x tendia a 5. É fácil notar também que a função **$f(x) = x^2 -5x +3$** é contínua e está definida para todos os valores de x no conjunto dos números reais.

É um exemplo simples mas que ilustra bem os recursos que o interpretador coloca à sua disposição para facilitar e ilustrar o curos de cálculo.

Desafio

Agora que você já conhece os segredos, tem a ferramenta em mãos e sabe como usá-la, que tal calcular o limite da expressão **$f(x) = 1 / (x^2 -5x +3)$.** Observe agora que, a expressão $(x^2 -5x +3)$ é denominador da função e, você sabe também que, denominadores não podem ser nulos ! O que acontecerá à função f(x) quando x tender ao valor de uma das raizes da expressão $x^2 -5x +3$?

Bom trabalho !

fernandopaim@paim.pro.br