Resolvendo integral definida com o interpretador Hall

Problema 1

Um problema clássico do cálculo integral é aquele que se refere ao cômputo do valor da área de uma curva qualquer **y=f(x)** e o eixo **x**. A solução é realizada usando-se da primitiva da função f. O exemplo abaixo ilustra uma aplicação desse cálculo usando o *interpretador Hall*. O problema abaixo consiste em calcular a área sob o gráfico da função **$y=x^2$** e o eixo x no intervalo de 2 a 8.

Resolução:

Nesse caso a função **f** é simples e uma primitiva da mesma é dada por **$F(x)=x^3/3$**. Assim, basta avaliar a primitiva **F** com os valores do intervalo dado, [2,8]. *(veja o anexo 1 no fim deste documento)*

Abaixo pode-se ver o algoritmo.

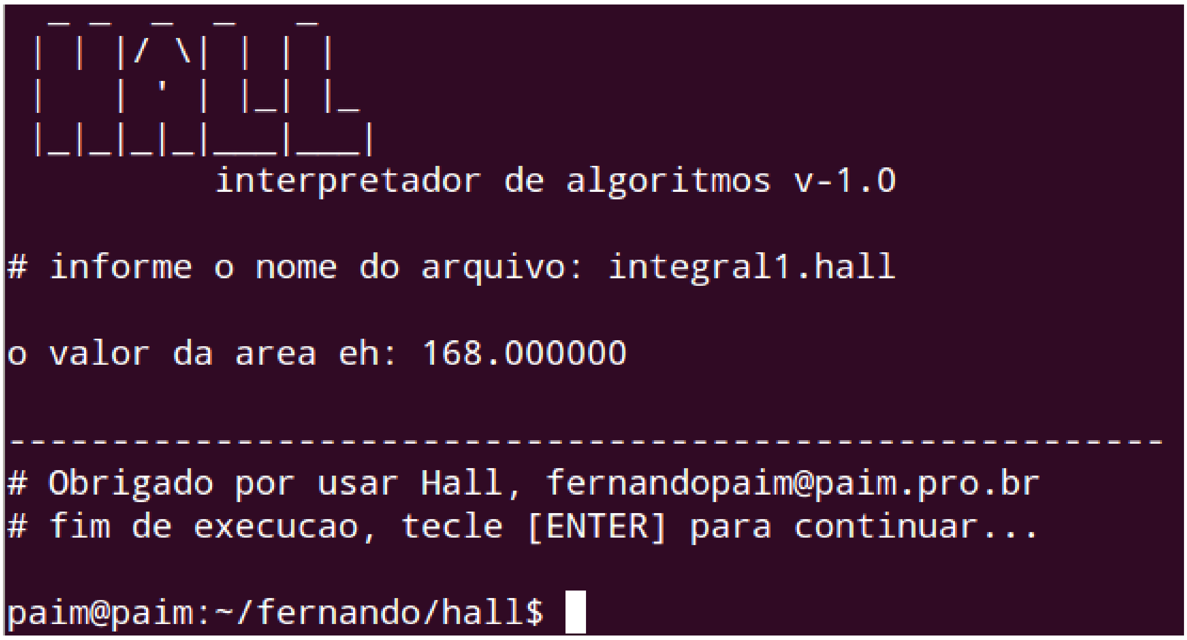
```
algoritmo()
{
    real a,b;
    real area;

    // a primitiva de y=x^2 eh x^3/3

    a := 2;
    b := 8;
    area := potencia(b,3)/3 - potencia(a,3)/3;
    escreva("o valor da area eh: ",area);
}
```

Programa 1: código fonte do algoritmo

Execução:

Abaixo pode-se ver a tela de execução do algoritmo e a resposta do problema. Pode-se observar que o programa apresentou o valor de 168 ua (unidades de área) que é a resposta correta.

Nota: a tela de execução abaixo refere-se ao ambiente linux.



Problema 1: tela de execução do algoritmo

Problema 2

Uma extensão interessante do problema 1 é o fato de podermos escolher os ***intervalos de avaliação***. É o que está proposto no programa abaixo:

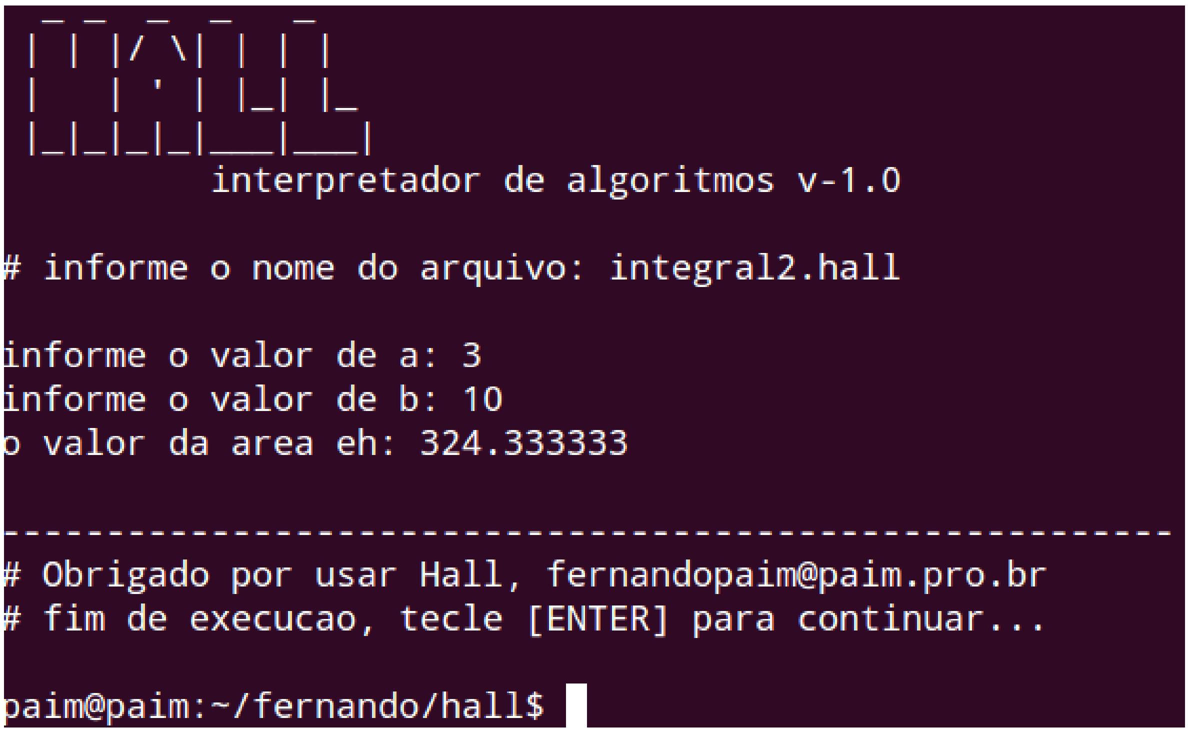
```
algoritmo()
{
    real a,b;
    real area;

    // a primitiva de y=x^2 eh x^3/3

    leia("informe o valor de a: ",a);
    leia("informe o valor de b: ",b);
    area := potencia(b,3)/3 - potencia(a,3)/3;
    escreva("o valor da area eh: ",area);
}
```

Programa 2: código fonte do algoritmo

Note que, nesse caso, criou-se duas variáveis **a** e **b** para representar os valores do intervalo informado. A variável **a** representa o limite inferior do intervalo e a variável **b** representa o limite superior do intervalo. [a,b]

Execução:

Abaixo pode-se ver a tela de execução do algoritmo e a resposta do problema. Pode-se observar que o programa apresentou o valor de 324.34 ua (unidades de área) que é a resposta correta.



Problema 2: tela de execução do algoritmo

Problema 3

Na história do cálculo, o problema de se determinar a área sob o gráfico de uma curva **y=f(x)**, foi inicialmente resolvido através de aproximações com o somatório de áreas de retângulos. Dividia-se a área sob a curva e o eixo **x** no intervalo considerado, por uma série de retângulos, cuja expressão da área é conhecida (*base x altura*), e somava-se essas áreas. O resultado era considerado como sendo a área procurada. Naturalmente que, ao realizar o cálculo dessa forma, um erro era introduzido em função da quantidade de retângulos utilizada. Quanto maior a quantidade de retângulos utilizada mais o valor calculado se aproxima do valor correto.

Abaixo pode-se ver um quadro que mostra de forma concisa os conceitos e metodologias envolvidas nesse cálculo.

Cálculo da área sob o gráfico da função $f(x) = x^2$

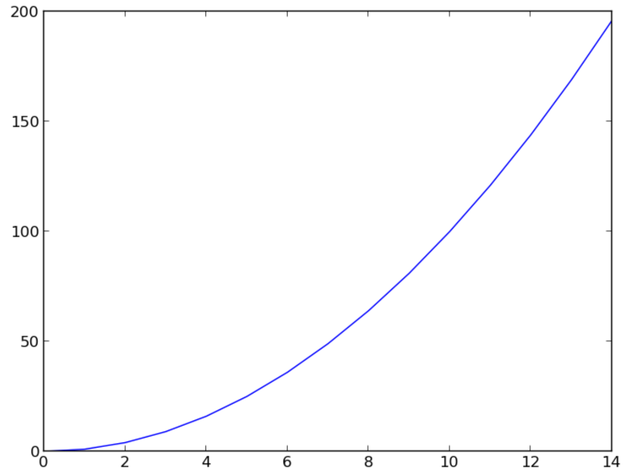
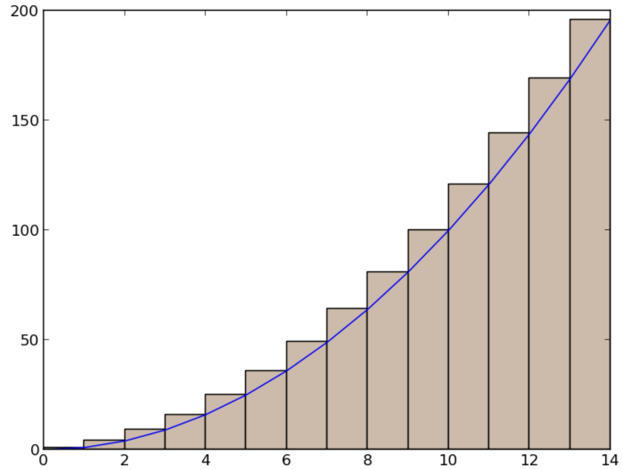


Gráfico da função $\mathbf{f(x)=x^2}$ no intervalo **[0,14]**.

A área sob o gráfico da função **f** e o eixo **x** é calculada através da primitiva da função **f** que é dada por $\mathbf{x^3/3}$. Assim, por exemplo, a área sob o gráfico no intervalo **[6,10]** é dada por:

$A = 10^3 / 3 - 6^3 / 3$
$A = 1000 / 3 - 216 / 3$
$A = 784 / 3$
$A = 261{,}33$

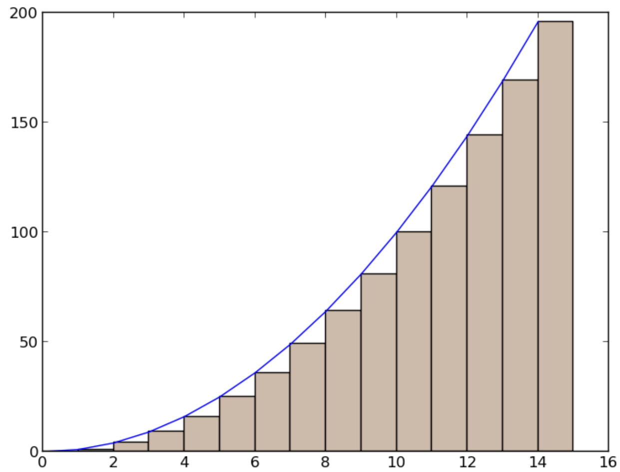


A área sob o gráfico da função **f** e o eixo **x** no intervalo **[6,10]** poderá ser calculada através da somatória das áreas dos retângulos envolventes.

A = base x altura

$A = 1.f(7) + 1.f(8) + 1.f(9) + 1.f(11)$
$A = 1.7^2 + 1.8^2 + 1.9^2 + 1.11^2$
$A = 49 + 64 + 81 + 121$
$A = 315$

nota-se que o valor calculado aproxima-se do valor real mas é maior que ele.



A área sob o gráfico da função **f** e o eixo **x** no intervalo **[6,10]** poderá ser calculada através da somatória das áreas dos retângulos envolventes.

A = base x altura

$A = 1.f(6) + 1.f(7) + 1.f(8) + 1.f(9)$
$A = 1.6^2 + 1.7^2 + 1.8^2 + 1.9^2$
$A = 36 + 49 + 64 + 81$
$A = 230$

nota-se que o valor calculado aproxima-se do valor real mas é menor que ele.

Um problema interessante então é: dada uma função **y=f(x)** e um intervalo **[a,b]**, calcular a área aproximada da função e o eixo **x** através do somatório das áreas dos *retângulos componentes*. Note que, todos os retângulo traçados no intervalo **[a,b]** terão o mesmo valor da **base** pois, o processo consiste em dividir o intervalo **[a,b]** em **n** partes para acondicionar os retângulos. Assim, o valor da **base** de cada um dos retângulos é dada pela expressão **(b-a)/n**. *Pode-se imaginar um segmento de comprimento **b-a** e que deve ser dividido em **n** partes.* Note que, quanto <u>maior</u> o valor de **n** utilizado no cálculo, <u>maior</u> a quantidade de retângulos, <u>menor</u> o valor da base e <u>mais</u> o cálculo se aproxima do valor real.

Muito bem. Resolvido o problema da **base** resta-nos resolver o problema da **altura** para que a área de cada retângulo esteja completamente definida. O valor da altura de cada retângulo é definido pelo valor da função **f**. Cada retângulo terá uma altura diferente em função de qual abscissa $\mathbf{x_i}$ escolhermos no intervalo **[a,b]**. Chamando de $\mathbf{b_i}$ a base de cada retângulo (igual para todos), vimos que seu valor é dado **(b-a)/n**. Assim, a área de cada retângulo será dada por $\mathbf{b_i * f(x_i)}$. A questão então é definir qual abscissa $\mathbf{x_i}$ utilizar. O retângulo tem uma largura $\mathbf{b_i}$ e assim temos duas abscissas a escolher. Uma no início do intervalo dada por $\mathbf{x_i}$ e outra, no final, dada por $\mathbf{x_i+b_i}$. Se escolhermos $\mathbf{x_i}$ o valor calculado será menor do que o valor real, se escolhermos $\mathbf{x_i+b_i}$ o valor calculado será maior do que o valor real. Por que?

O programa abaixo ilustra o algoritmo onde se escolheu o cálculo por excesso, isto é, o resultado será maior do que o valor real. Novamente, a proposta aqui é calcular o valor da área da função $\mathbf{y=x^2}$ no intervalo **[2,8]** usando o método da somatória das áreas dos retângulos envolvidos.

```
algoritmo()
{
     real a;        // limite inferior do intervalo
     real b;        // limite superior do intervalo
     real area;     // o valor calculado da area
     real n;        // quantidade de retangulos
     real dx;
     real bi;       // a base de cada retangulo
     real hi;       // a altura de cada retangulo
     real ai;       // a area de cada retangulo
     real xi;       // abscissas do intervalo
     inteiro i;     // auxiliar no laco

     // area do retangulo = base * altura

     a := 2;
     b := 8;
     leia("informe a quantidade de retangulos: ",n);
     bi := (b-a)/n;
     area := 0;
     xi := a;
     para (i:=1 ate n incr 1)
     {
          xi := xi+bi;
          hi := potencia(xi,2);
          ai := bi*hi;
          area := area + ai;
          escreva("retangulo ",i," => xi = ",xi, " hi = ",hi," area = ",ai);
     }
     escreva("o valor da area por excesso eh: ",area);
     escreva("o valor da base dos retangulos eh: ",bi);
}
```

Programa 3: código fonte do algoritmo

Execução:

Na execução do algoritmo do problema 3 pode-se ver o passo-a-passo do cálculo da área de cada um dos retângulos. Note que o valor correto da área é **168 ua** conforme calculado no problema 1 e, neste exemplo, o valor calculado foi de **186.36 ua**.

```
  _ _  _  _   _
 | | |/ \| | | |
 |   | ' | |_| |_
 |_|_|_|_|___|___|
          interpretador de algoritmos v-1.0

# informe o nome do arquivo: integral3.hall

informe a quantidade de retangulos: 10
retangulo 1 => xi = 2.600000 hi = 6.760000 area = 4.056000
retangulo 2 => xi = 3.200000 hi = 10.240000 area = 6.144000
retangulo 3 => xi = 3.800000 hi = 14.440000 area = 8.664000
retangulo 4 => xi = 4.400000 hi = 19.360000 area = 11.616000
retangulo 5 => xi = 5.000000 hi = 25.000000 area = 15.000000
retangulo 6 => xi = 5.600000 hi = 31.360000 area = 18.816000
retangulo 7 => xi = 6.200000 hi = 38.440000 area = 23.064000
retangulo 8 => xi = 6.800000 hi = 46.240000 area = 27.744000
retangulo 9 => xi = 7.400000 hi = 54.760000 area = 32.856000
retangulo 10 => xi = 8.000000 hi = 64.000000 area = 38.400000
o valor da area por excesso eh: 186.360000
o valor da base dos retangulos eh: 0.600000

--------------------------------------------------------
# Obrigado por usar Hall, fernandopaim@paim.pro.br
# fim de execucao, tecle [ENTER] para continuar...

paim@paim:~/fernando/hall$
```

Problema 3: tela de execução do algoritmo

Problema 4

O problema 4 é essencialmente o mesmo proposto no problema 3 com a diferença de que neste, optou-se pelo cálculo por falta, isto é, o valor calculado da área será menor do que o seu valor real.

Veja o programa abaixo

```
algoritmo()
{
     real a;        // limite inferior do intervalo
     real b;        // limite superior do intervalo
     real area;     // o valor calculado da area
     real n;        // quantidade de retangulos
     real dx;
     real bi;       // a base de cada retangulo
     real hi;       // a altura de cada retangulo
     real ai;       // a area de cada retangulo
     real xi;       // abscissas do intervalo
     inteiro i;     // auxiliar no laco

     // area do retangulo = base * altura

     a := 2;
     b := 8;
     leia("informe a quantidade de retangulos: ",n);
     bi := (b-a)/n;
     area := 0;
     xi := a;
     para (i:=1 ate n incr 1)
     {
          hi := potencia(xi,2);
          ai := bi*hi;
          area := area + ai;
          escreva("retangulo ",i," => xi = ",xi, " hi = ",hi," area = ",ai);
          xi := xi+bi;
     }
     escreva("o valor da area por falta eh: ",area);
     escreva("o valor da base dos retangulos eh: ",bi);
}
```

Programa 4: código fonte do algoritmo

Execução:

Na execução do algoritmo do problema 4 pode-se ver o passo-a-passo do cálculo da área de cada um dos retângulos. Note que o valor correto da área é **168 ua** conforme calculado no problema 1 e, neste exemplo, o valor calculado foi de **150.36 ua**.

```
 _ _  _  _   _
| | |/ \| | | |
|   | ' | |_| |_
|_|_|_|_|___|___|
          interpretador de algoritmos v-1.0

# informe o nome do arquivo: integral4.hall

informe a quantidade de retangulos: 10
retangulo 1 => xi = 2.000000 hi = 4.000000 area = 2.400000
retangulo 2 => xi = 2.600000 hi = 6.760000 area = 4.056000
retangulo 3 => xi = 3.200000 hi = 10.240000 area = 6.144000
retangulo 4 => xi = 3.800000 hi = 14.440000 area = 8.664000
retangulo 5 => xi = 4.400000 hi = 19.360000 area = 11.616000
retangulo 6 => xi = 5.000000 hi = 25.000000 area = 15.000000
retangulo 7 => xi = 5.600000 hi = 31.360000 area = 18.816000
retangulo 8 => xi = 6.200000 hi = 38.440000 area = 23.064000
retangulo 9 => xi = 6.800000 hi = 46.240000 area = 27.744000
retangulo 10 => xi = 7.400000 hi = 54.760000 area = 32.856000
o valor da area por falta eh: 150.360000
o valor da base dos retangulos eh: 0.600000

--------------------------------------------------------
# Obrigado por usar Hall, fernandopaim@paim.pro.br
# fim de execucao, tecle [ENTER] para continuar...

paim@paim:~/fernando/hall$
```

Problema 4: tela de execução do algoritmo

Problema 5

Geralmente, admite-se uma determinada tolerância de erro no cálculo de alguma quantidade. Um problema interessante é o de calcular quantos retângulos serão necessários para calcular a área da função **y=f(x)** de forma que o erro não ultrasse determinado valor. É o que se propõe aqui neste exemplo.

Vamos considerar como enunciado desse problema o seguinte texto: calcular a área sob o gráfico da função **f(x)=x²** e o eixo **x** no intervalo **[2,8]** usando a aproximação do somatório das áreas dos retângulos envolventes com erro máximo igual a **10%** sabendo-se que o valor real da mesma é **168 ua**.

`Veja abaixo o programa que resolve esse problema.`

```
algoritmo()
{
     real a;        // limite inferior do intervalo
     real b;        // limite superior do intervalo
     real ac;       // o valor calculado da area
     real ar;       // o valor real da area
     real n;        // quantidade de retangulos
     real erro;     // valor do erro
     real bi;       // a base de cada retangulo
     real hi;       // a altura de cada retangulo
     real ai;       // a area de cada retangulo
     real xi;       // abscissas do intervalo
     inteiro i;     // auxiliar no laco

     // area do retangulo = base * altura

     a := 2;
     b := 8;
     ar := 168;
     xi := a;
     n := 10;

     repita
     {
          n := n + 1;
          bi := (b-a)/n;
          ac := 0;

          para (i:=1 ate n incr 1)
          {
               xi := xi+bi;
               hi := potencia(xi,2);
               ai := bi*hi;
               ac := ac + ai;
          }

          erro := (ac - ar) / ar;

     } ate (erro <= 0.1);
     escreva("o valor da area por excesso eh: ",ac);
     escreva("o valor da base dos retangulos eh: ",bi);
     escreva("o valor do erro eh: ", erro);
     escreva("o total de retangulos eh: ",n);
}
```

Problema 5: código fonte do algoritmo

Execução:

Note que foram necessários **11** retângulos para garantir um erro não maior que 10% com relação ao valor correto da área que é 168 ua para **f(x)=x^2** no intervalo **[2,8]**. O valor da área calculado pelo programa foi de **184.66 ua**. Note ainda que, o resultado apresentado pelo programa foi superior ao valor real.

Problema 5: tela de execução do algoritmo

Problema 6

O problema 6 aqui proposto é essencialmente o mesmo do problema 5. A diferença aqui é que optou-se por escolher o valor do erro.

Vamos considerar como enunciado desse problema o seguinte texto: calcular a área sob o gráfico da função **f(x)=x^2** e o eixo **x** no intervalo **[2,8]** usando a aproximação do somatório das áreas dos retângulos envolventes com erro máximo igual a **err%** sabendo-se que o valor real da mesma é **168 ua**.

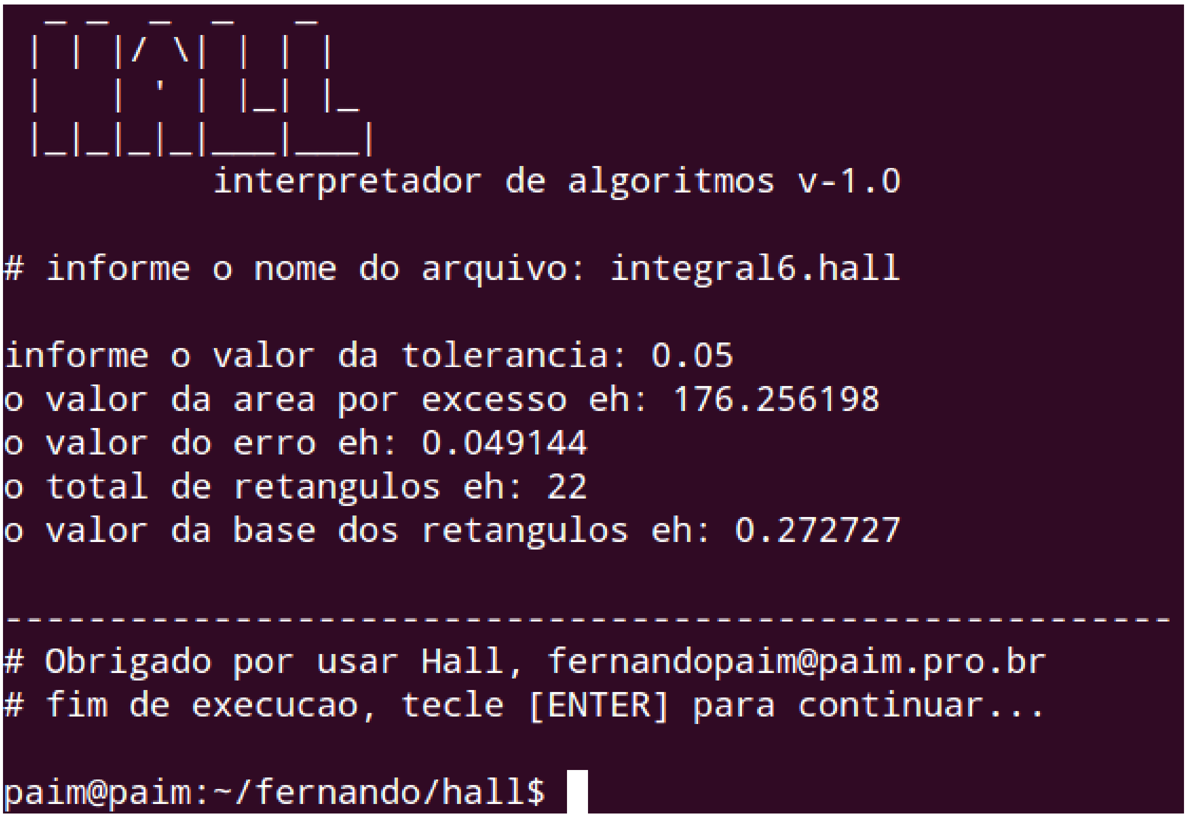
Veja abaixo o programa que resolve esse problema.

```
algoritmo()
{
     real a;        // limite inferior do intervalo
     real b;        // limite superior do intervalo
     real ac;       // o valor calculado da area
     real ar;       // o valor real da area
     real bi;       // a base de cada retangulo
     real hi;       // a altura de cada retangulo
     real ai;       // a area de cada retangulo
     real xi;       // abscissas do intervalo
     real tol;      // valor da tolerancia de erro
     real err;      // valor do erro
     inteiro i;     // auxiliar no laco
     inteiro n;     // quantidade de retangulos

     leia("informe o valor da tolerancia: ",tol);

     a := 2;
     b := 8;
     ar := 168;
     n := 10;
     err := 1.0;

     enquanto (err >= tol)
     {
          n := n + 1;
          bi := (b-a)/n;
          xi := a;
          ac := 0;

          para (i:=1 ate n incr 1)
          {
               xi := xi+bi;
               hi := potencia(xi,2);
               ai := bi*hi;
               ac := ac + ai;
          }
          err := (ac - ar) / ar;
     }

     escreva("o valor da area por excesso eh: ",ac);
     escreva("o valor do erro eh: ", err);
     escreva("o total de retangulos eh: ",n);
     escreva("o valor da base dos retangulos eh: ",bi);
}
```

Problema 6: código fonte do algoritmo

Execução:

Note que foram necessários **22** retângulos para garantir um erro não maior que 0.05 com relação ao valor correto da área que é **168 ua** para **f(x)=**x^2 no intervalo **[2,8]**. O valor da área calculado pelo programa foi de **176.25 ua**. Note ainda que, o resultado apresentado pelo programa foi superior ao valor real.



Problema 6: tela de execução do algoritmo

Conclusão

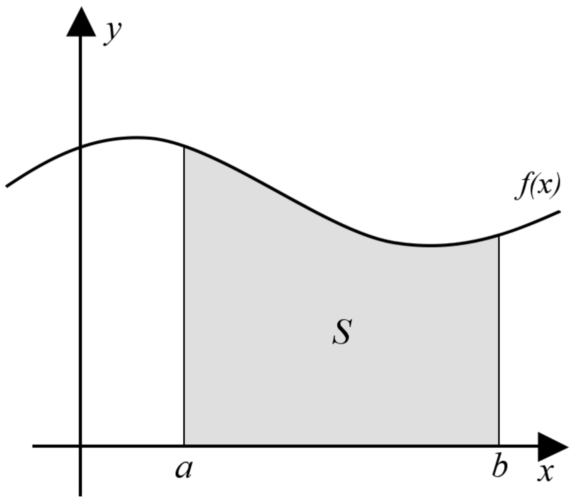
O propósito desses exercícios foi o de ilustrar como o interpretador Hall pode ser utilizado para ajudar na compreensão dos conceitos envolvidos com a integral definida. A partir daqui você poderá criar outras propostas de exercícios. Atualizações desse documento poderá ser encontrada no endereço:
http://www.paim.pro.br/downloads

That's all folks!

Qualquer sugestão é enviar para fernandopaim@paim.pro.br

boa sorte.

Anexo 1 - Relação entre a integral definida e a área de um gráfico



O cálculo integral nos diz que a área **S** sob a curva do gráfico da função **f(x)** no intervalo **[a,b]** e o eixo **x** é dada pela expressão:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

O teorema fundamental do cálculo estabelece uma relação entre a função **f** e sua primitiva **F** que nos permite calcular o valor da área **S** acima.

O teorema afirma que:

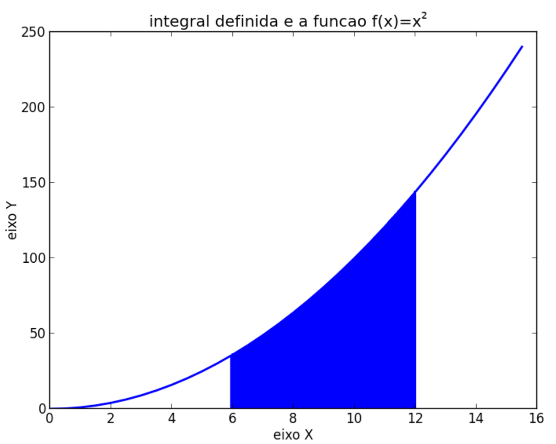
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A relação entre a função **f** e sua primitiva é tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Assim, em nosso exemplo, onde a função **f** é dada por ***f(x)=x²*** a função primitiva é dada por:

$$\frac{x^3}{3} => (\frac{x^3}{3})' = x^2$$



Calculando o nosso exemplo da figura ao lado.

$$S = F(b) - F(a)$$

$$S = F(12) - F(6)$$

$$S = \frac{12^3}{3} - \frac{6^3}{3}$$

$$S = 504$$