Derivada da função: $f(x) = \sqrt{x}$

by fernandopaim@paim.pro.br

Da definição de derivada temos que:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicando a definição à função $f(x)$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

multiplicando o numerador pelo seu conjugado podemos eliminar a expressão em função da raiz quadrada *(o que facilita os cálculos)*. Para que a expressão dada não seja alterada, multiplicamos também o denominador pelo mesmo conjugado. Assim temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

usando a fatoração no numerador $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ e fazendo a substituição temos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

simplificando a raiz quadrada com a potência 2 no numerador temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

efetuando a soma aritmética do numerador $(x+h) - (x) = h$ temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

simplificando o h do numerador com o h do denominador temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

uma vez que $h \to 0$, a expressão $\sqrt{x+h}$ se transforma em $\sqrt{x}$.

Fazendo a substituição no denominador temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})}$$

uma vez que a expressão não está mais em função de h o limite pode ser eliminado e ficamos com

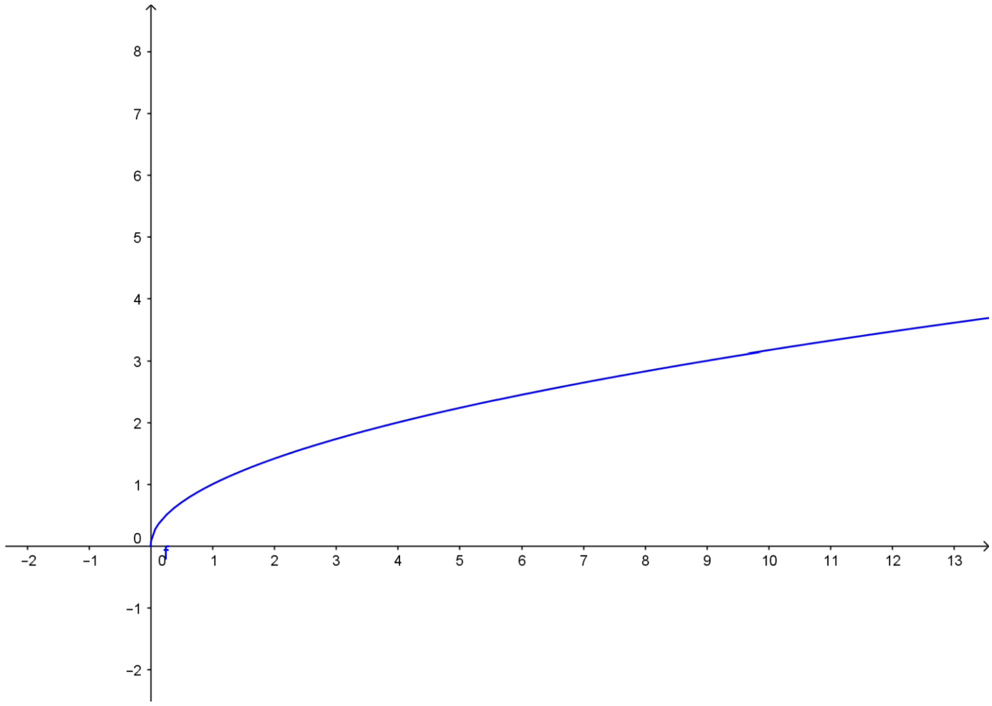
$$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})}$$

Efetuando a adição indicada no denominador temos

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

que é a expressão final da derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$

Gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$



A expressão da derivada $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ é igual à tangente do ângulo que a reta tangente faz com a curva em um determinado ponto.

Assim, por exemplo, considerando o ponto de abscissa $x = 2$, temos:

para $x = 2$

$$f(x) = \sqrt{x} \to f(2) = \sqrt{2} \to f(2) = 1.4142$$

$$f'(x) = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2 \times 1.4142} = 0.3535$$

Assim a inclinação da reta tangente à curva no ponto $x = 2$ vale 0.3535 e o ângulo vale $\alpha = \arctan(0.3535) \to \alpha = 19.47°$.

Esse valor pode ser confirmado na figura abaixo feita com o software *geogebra*.