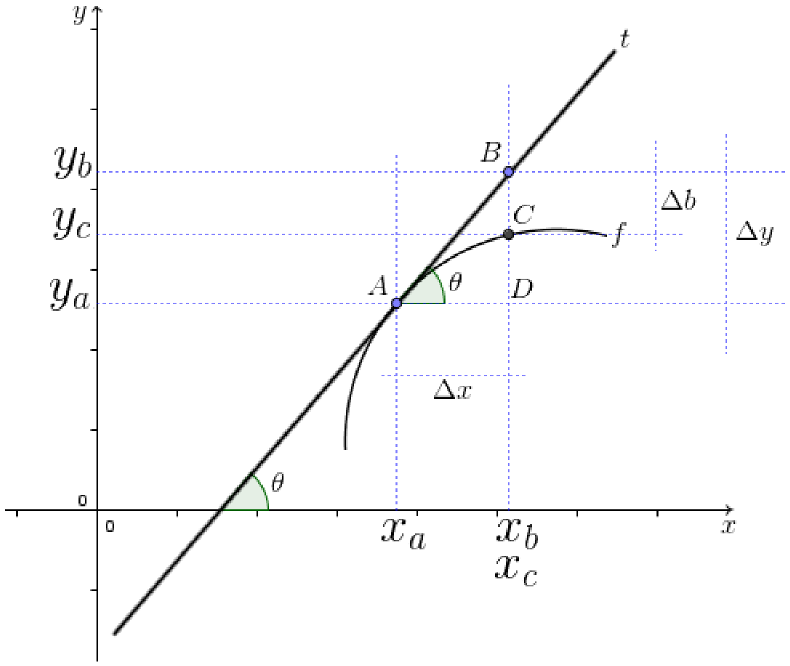
Uma definição de derivada

fernandopaim@paim.pro.br

Considere a figura abaixo, que representa o gráfico de uma função **f**, definida num intervalo de números reais. O problema é: Como traçar a reta tangente ao gráfico de **f** no ponto **A?**



Solução:

Vamos supor que a reta **t** que passa pelos pontos **A** e **B** seja a reta que procuramos, tangente à curva de **f** no ponto **A**. A equação da reta que passa por um ponto de coordenadas (x_0, y_0) é dada pela expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde **m** é o coeficiente angular da reta. O coeficiente angular da reta é definido pela tangente do ângulo que a mesma faz com o eixo **x**. No exemplo a reta tangente é a reta **t** e o ângulo que a reta faz com o eixo **x** é θ. Assim, considerando que a reta **t** passa pelos pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ podemos escrever a equação de **t** da seguinte forma:

$$y_b - y_a = m(x_b - x_a)$$

e podemos calcular o coeficiente angular **m** facilmente pela seguinte relação:

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Porém, temos um problema aqui... Não conhecemos as coordenadas do ponto $B(x_b, y_b)$. O ponto $A(x_a, y_a)$ é conhecido, isto é, as coordenadas são conhecidas pois trata-se do ponto da curva de **f** sobre o qual desejamos traçar a tangente.

O que fazer??

O coeficiente angular **m** é dado pela tangente do ângulo θ. Da figura, no triângulo retângulo **ABD**, vemos que a relação entre o cateto oposto e o cateto adjacente é dada por:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Se utilizarmos o triângulo retângulo **ACD** para calcularmos a tangente do ângulo θ, introduzimos um erro no cálculo desse valor, pois, nesse caso, o ponto **C** (projeção do ponto B) sobre a curva **f** está abaixo do ponto **B** da reta tangente, e tem um valor de ordenada menor, assim o valor calculado será menor que o valor real. O valor do cateto oposto nesse caso será: $(\Delta y - \Delta b)$. e a expressão para o cálculo aproximado da tangente fica da seguinte forma:

$$\tan\theta \approx \frac{\Delta y - \Delta b}{\Delta x}$$

Porém há uma vantagem aqui. O ponto $C(x_c, y_c)$ tem suas coordenadas conhecidas pois é um ponto da função **f** e está relativamente próximo do ponto correto $B(x_b, y_b)$. O ponto $D(x_d, y_d)$ também é conhecido, ele tem a mesma abscissa do ponto $C(x_c, y_c)$ e a mesma ordenada do ponto $A(x_a, y_a)$.

Expressando **m** em função das coordenadas dos pontos **A** e **C** temos:

$$m \approx \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}$$

ou ainda, expressando **m** em termos da função **f**, ficamos com:

$$m \approx \frac{f(x_c) - f(x_a)}{x_c - x_a}$$

Fazendo $h = x_c - x_a$ e, por consequência $x_c = x_a + h$, e fazendo as substituições, temos:

$$m \approx \frac{f(x_a + h) - f(x_a)}{h}$$

Uma vez que o ponto **A** é um ponto arbitrário qualquer da curva, isto é, o cálculo de **m** não depende de um ponto específico mas apenas da abscissa desse ponto, podemos reescrever a expressão acima da forma geral:

$$m \approx \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

E agora!!??

Ora, essa expressão apresenta uma vantagem pois sendo **h** um comprimento que designa o quão perto ou longe estão os pontos **A** e **C,** quanto mais próximo estiver o ponto **C** do ponto **A**, menor será o valor de **h** e mais próximo do valor real estará a tangente do ângulo θ.

Assim, à medida que o ponto **B** se aproxima do ponto **A** (o que significa também que mais próximo do ponto **A** estará também o ponto **C**), o comprimento **h** dado por $h = x_c - x_a$, dado pela diferença entre as abscissas dos pontos **A** e **C**, irá diminuindo cada vez mais e tendendo para zero. Isto é representado pela seguinte expressão: $h \to 0$. Poderíamos pensar que quando **h** se tornar zero, o erro seria nulo e teríamos obtido a resposta do problema. Porém, não é o caso, pois se os pontos **A** e **B** coincidirem não será possível traçar a reta que necessita de dois pontos distintos.

Dessa forma, interessa-nos os pontos extremamente próximos do ponto **A**, sem, no entanto, coincidir com o ponto **A**. Esse processo de aproximar indefinidamente uma grandeza de outra é conhecido como **passagem ao limite** e é nesse processo que se encontra a solução do problema da tangente.

A expressão final fica da seguinte forma:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por hora é isso!

fernandopaim@paim.pro.br | http://www.paim.pro.br

http://www.paim.pro.br/downloads/apoio/uma definição de derivada