A fórmula de Bhaskara

fernandopaim@paim.pro.br

A equação do 2º grau apresenta a seguinte forma geral $ax^2 + bx + c = 0$, onde os coeficientes a, b, c são constantes e o coeficiente a deve ser diferente de zero $(a \neq 0)$, caso contrário, não seria uma equação do segundo grau. O coeficiente a é chamado o termo em x^2 (termo em xis dois), o coeficiente b é chamado o termo em x (termo em xis) e o coeficiente c é denominado de termo independente, uma vez que, se apresenta na equação de forma livre, não vinculado a qualquer operação com x.

O problema consiste então em achar os valores de x que satisfazem a equação, isto é, quais são os valores de x que, quando substituídos na expressão $ax^2 + bx + c$, faça com que se obtenha o valor zero. Esse processo de se encontrar esses valores de x também é conhecido como "**encontrar os zeros da função**" e também é conhecido como "**encontrar as raízes da equação**".

Dessa forma, estamos buscando uma expressão que relacione x com os coeficientes da equação, alguma coisa do tipo: $x = expr(a, b, c)$ (xis como expressão de a, b e c). Assim, a primeira coisa que devemos tentar fazer é separar e isolar o x de um lado da equação e os coeficientes do outro lado.

Assim,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$ *passando o **c** para o outro lado*

$$x(ax + b) = -c$$ *fatorando o **xis***

$$ax + b = -\frac{c}{x}$$ *passando o **xis** para o outro lado*

$$ax = -\frac{c}{x} - b$$ *passando o **b** para o outro lado*

$$x = \frac{1}{a} \times \left(-\frac{c}{x} - b\right)$$ *passando o **a** para o outro lado*

Muito bem! Observando a última expressão anterior, conseguimos isolar x do lado esquerdo da equação mas temos um problema aqui. O x também aparece do lado direito da equação e de uma forma que não conseguimos agrupá-lo com o x do lado esquerdo, e isso nos impossibilita de resolvermos o problema.

Na verdade, com um pouco de conhecimento e experiência, já poderíamos ter previsto esse fato, quando encontramos a expressão $ax + b = -\frac{c}{x}$ que relaciona x nos dois lados da equação.

Voltemos então à expressão: $ax^2 + bx = -c$

Com o conhecimento e a experiência e talvez até um *insight*, ingredientes que vão sendo adquiridos com a experiência matemática, podemos notar que a expressão $ax^2 + bx$ nos traz à lembrança uma forma bem conhecida dos produtos notáveis, a saber:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Vemos que nossa expressão $ax^2 + bx$ se parece um pouco com o lado direito do produto notável, $A^2 + 2AB + B^2$ e, parece ser promissor investirmos por aqui. Podemos relacionar o termo ax^2 de nossa equação com o termo A^2 do produto notável pois são termos de grau 2, o termo bx de nossa equação com o termo $2AB$ do produto notável pois são termos de grau 1. Para que a associação fique completa, falta apenas descobrimos em nossa equação um correspondente para o termo B^2 do produto notável.

Porque parece promissor investirmos nesse caminho?

Resposta: Caso consigamos expressar a equação, que atualmente está na forma $ax^2 + bx$, como uma expressão da forma $A^2 + 2AB + B^2$, poderemos, após esse fato, realizarmos a substituição da expressão $A^2 + 2AB + B^2$ pela sua correspondente forma sintética: $(A + B)^2$. Uma vez que, os coeficientes A e B serão expressos em função de x teremos conseguido isolar o x em um lado da equação.

O que está sendo sugerido é para olharmos o produto notável nesse sentido: $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

Pensando um pouquinho à frente *(já que conhecemos o resultado a que desejamos chegar)*

Assim, assumindo que será possível realizarmos o que estamos pensando e já vislumbrando o resultado, podemos notar que como a expressão $(A + B)^2$ é uma expressão de potência **2**, ao extrairmos o valor de $A + B$ teremos que extrair a raiz quadrada do termo que estará do lado direito da equação. (*Sabemos que a expressão que envolve o cálculo das raízes envolve o cálculo de uma raiz quadrada, porém, vamos chegar lá).*

Bem, vamos então em busca de nosso termo B^2

Assim, desenvolvendo um pouco a expressão $ax^2 + bx = -c$, temos:

$$ax^2 + bx = -c$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{dividindo tudo por } \mathbf{a}$$

Agora podemos relacionar nossa expressão $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ com o produto notável $A^2 + 2AB + B^2$, temos:

$$A^2 = x^2 \rightarrow A = x$$

$$2AB = \frac{b}{a}x$$,

Desenvolvendo a expressão pois o que queremos achar é o valor de B. Assim,

$$B = \frac{1}{2A}(\frac{b}{a}x)$$ passando o **2A** para o outro lado

$$B = \frac{1}{2x}(\frac{b}{a}x) \; pois \; A = x$$ substituindo o valor de **A** por **x**

$$B = \frac{b}{2a}$$ simplificando os **xis**

Uma vez que, estamos procurando o valor de B^2 basta elevar ao quadrado e obtemos:

$$B^2 = (\frac{b}{2a})^2 \rightarrow B^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

Assim, poderemos construir a expressão abaixo:

$$x^2 + \frac{b}{a}x \rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

Desse modo, nossa expressão que era $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ pode ser escrita como:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Note que, apenas somamos o valor $\frac{b^2}{4a^2}$ dos dois lados da equação para que o resultado não seja alterado. Note que esse valor é o nosso termo B^2 que procurávamos. Agora, o lado esquerdo dessa equação pode ser expresso pela forma sintética do produto notável.

Obtemos então:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$ fazendo a substituição do produto notável

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$ trocando os termos de lugar

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ tirando o MMC do lado direito

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \sqrt[2]{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ extraindo a raiz quadrada dos termos

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{\sqrt[2]{4a^2}}$$ raiz quadrada de uma fração

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$ extraindo a raiz do denominador

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$ passando o termo para o outro lado

$$x = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$ tirando o MMC

Assim, obtemos a conhecida expressão que é utilizada para se encontrar as raízes de uma equação do 2º grau.

Por hora é isso!

fernandopaim@paim.pro.br | http://www.paim.pro.br

http://www.paim.pro.br/downloads/apoio/bhaskara.pdf