Problema 5a

by fernandopaim@paim.pro.br

Resolva o sistema linear por escalonamento S = $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$

Resolução

Utilizaremos quatro métodos para ilustrar a resolução do sistema linear acima.

São eles:

1. Método da Substituição
2. Regra de Cramer
3. Escalonamento
4. Eliminação de Gauss (pivotamento)

1-Método da Substituição

Nesse método de resolução, uma vez que dispomos de três equações e três incógnitas, isola-se o valor de uma incógnita em uma das equações e substitui-se esse valor nas outras duas equações. Dessa forma, ficamos com um sistema de duas equações e duas incógnitas, o qual poderá ser mais facilmente resolvido. Após se achar o valor dessas duas incógnitas, faz-se o retorno em qualquer equação do sistema, que contenha a terceira incógnita, para calcula-la.

O sistema dado apresenta as seguintes equações:

$$
\begin{array}{ll}
x + y - z = 1 & \text{eq.1} \\
x - y + z = -1 & \text{eq.2} \\
2x + y - 3z = 2 & \text{eq.3}
\end{array}
$$

Vamos isolar o valor de **x** na **eq.1**

$x + y - z = 1 \rightarrow$

$x = 1 - y + z$ **eq.4**

Agora, substituímos o valor de **x**, encontrado na **eq.4** acima, nas equações **eq.2** e **eq.3**.

Substituindo na eq.2, temos:

eq2.: $(1- y + z) – y + z = -1$
eq2.: $1- y + z – y + z = -1$
eq2.: $1- 2y + 2z = -1$
eq2.: $-2y +2z = -2$ **eq.5**

Substituindo na eq.3, temos:

eq3.: $2(1 – y + z) + y – 3z = 2$
eq3.: $2 – 2y + 2z + y – 3z = 2$
eq3.: $–y –z = 0$ **eq.6**

Agora nosso sistema está composto pelas seguintes equações (eq.5 e eq.6 acima):

$-2y +2z = -2$
$–y –z = 0$

Para solucionar o sistema, basta aplicar o método da substituição nesse sistema. Vamos isolar o valor de y na equação eq.6.

eq.6.: $- y - z = 0$
eq.6.: $-y = +z$ ou
eq.6.: $y = -z$ **eq.7**

Agora, fazemos a substituição desse valor de y na equação eq.5. e assim, achamos o valor da incógnita z. Veja:

eq.5.: $-2y + 2z = - 2$
eq.5.: $-2(-z) + 2z = -2$
eq.5.: $2z + 2z = -2$
eq.5.: $4z = -2$
eq.5.: $z = -2/4$
eq.5.: $z = -1/2$

Ok, agora, uma vez que o valor da variável **z** é conhecido, usando qualquer equação que tenha apenas **z** e **y** como incógnitas, pode-se calcular o valor de **y**. Por simplicidade de cálculo vamos usar a equação **eq.7**, que diz que:

$y = -z$

assim,

$y = - (-1/2)$
$y = +1/2$

Uma vez conhecidos os valores das variáveis **y** e **z**, podemos calcular o valor da última incógnita do sistema, a variável **x**. Basta pegar qualquer equação que contenha as três variáveis. Vamos utilizar a equação **eq.4** que diz que:

x = 1 - y + z

fazendo as substituições de valores, temos:

x = 1 - (1/2) + (-1/2)
x = 1 – 1/2 - 1/2
x = 1 – 1
x = 0

Agora podemos escrever o vetor solução do sistema: **S = {0, ½, -½}**

2-Regra de Cramer

A solução de sistemas lineares pela _Regra de Cramer_ utiliza o cálculo de determinantes da seguinte forma:

$$S=\{x=\frac{Dx}{D}, y=\frac{Dy}{D}, z=\frac{Dz}{D}\}$$

onde,

D é o determinante dos coeficientes das incógnitas.
Dx, Dy e Dz é o determinante que se obtém a partir de D, substituindo-se a coluna dos coeficientes relativos à incógnita pela coluna dos termos independentes.

A partir das equações do sistema dado escrevemos o determinante dos coeficientes das incógnitas:

$$D= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

Calculando o determinante D

$$D= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

D = (1*-1*-3) + (1*1*2) + (-1*1*1) – {(-1*-1*2) + (1*1*1) + (1*1*-3)}
D = (3) + (2) + (-1) – {(2) + (1) + (-3)}
D = 3 + 2 – 1 – {2 + 1 - 3}
D = 4 – {0}
D = 4, logo o sistema é possível e tem uma única solução.

Calculando Dx

$$Dx= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

$$Dx= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Dx = (1*-1*-3) + (1*1*2) + (-1*-1*1) - {(-1*-1*2) + (1*1*1) + (1*-1*-3)}
Dx = (3) + (2) + (1) – {(2) + (1) + (3)}
Dx = 3 + 2 + 1 – {2 + 1 + 3}
Dx = 6 – {6}
Dx = 0

Calculando Dy

$$Dy= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

Dy = (1*-1*-3) + (1*1*2) + (-1*1*2) - {(-1*-1*2) + (1*1*2) + (1*1*-3)}
Dy = (3) + (2) + (-2) - {(2) + (2) + (-3)}
Dy = 3 + 2 – 2 – {2 + 2 – 3}
Dy = 3 – {1}
Dy = 2

Calculando Dz

$$Dz= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Dz = (1*-1*2) + (1*-1*2) + (1*1*1) - {(1*-1*2) + (1*-1*1) + (1*1*2)}
Dz = (-2) + (-2) + (1) - {(-2) + (-1) + (2)}
Dz = -2 - 2 + 1 – {-2 - 1 + 2}
Dz = -3 – {-1}
Dz = -3 + 1
Dz = -2

Calculando cada uma das variáveis temos:

$$S=\{x=\frac{Dx}{D}, y=\frac{Dy}{D}, z=\frac{Dz}{D}\}$$

$$S=\{\frac{0}{4},\frac{2}{4},-\frac{2}{4}\}$$

$$S=\{0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\}$$

3-Escalonamento

A resolução de sistemas lineares pela por *Escalonamento* consiste em aplicar operações de *combinação linear* entre as linhas e troca de posição de linhas de forma a obter uma matriz triangular superior.

O método de escalonamento deve ser aplicado ma matriz expandida do sistema, isto é, a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas juntamente com a coluna dos termos independentes.

No sistema dado por S = $\begin{matrix} x+y-z=1 \\ x-y+z=-1 \\ 2\text{x}+y-3\text{z}=2 \end{matrix}$

A matriz expandida é dada por

M = $\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{matrix}\right\|$

e o processo do escalonamento consiste em transformar a matriz expandida do sistema em uma matiz triangular superior da seguinte forma:

T = $\left\|\begin{matrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \end{matrix}\right\|$ onde a,b,c,d,e,f,g,i são valores numéricos. Observamos então que, a metodologia consistirá em transformar os valores abaixo da diagonal principal em zeros.

Escalonando...

Observemos que, se multiplicarmos a segunda linha por -1 e somarmos à primeira linha, conseguimos gerar o primeiro valor nulo na posição 2,2. Então vamos aplicar a primeira combinação linear sobre a segunda linha.

Façamos L2 = (-1)*L2 + L1.

L2 = (-1)*L2 + L1		
M = $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$	a_{21}=(-1)*a_{21} + a_{11} a_{21}=(-1)*1 + 1 a_{21}=-1 + 1 a_{21}=0	a_{22}=(-1)*a_{22} + a_{12} a_{22}=(-1)*-1 + 1 a_{22}=1 + 1 a_{22}=2
a_{23}=(-1)*a_{23} + a_{13} a_{23}=(-1)*1 + (-1) a_{23}=-1 - 1 a_{23}=-2	a_{24}=(-1)*a_{24} + a_{14} a_{24}=(-1)*-1 + 1 a_{24}=1 + 1 a_{24}=2	após L2... M = $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$

Ok, já conseguimos que “zerar” o elemento a_{21}. Agora vamos trabalhar com o elemento a_{31}. Observemos que, se multiplicarmos a primeira linha por -2 e somarmos o resultado com a terceira linha, iremos obter a_{31}=0.

Assim, façamos então L3 = (-2)*L1 + L3

L3 = (-2)*L1 + L3		
M = $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$	a_{31}=(-2)*a_{11} + a_{31} a_{31}=(-2)*1 + 2 a_{31}=-2 + 2 a_{31}=0	a_{32}=(-2)*a_{12} + a_{32} a_{32}=(-2)*1 + (1) a_{32}=-2 + 1 a_{32}=-1
a_{33}=(-2)*a_{13} + a_{33} a_{33}=(-2)*-1 + (-3) a_{33}=2 - 3 a_{33}=-1	a_{34}=(-2)*a_{14} + a_{34} a_{34}=(-2)*1 + (2) a_{34}=-2 + 2 a_{34}=0	após L3... M = $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$

Ok, quase lá... Note que, falta apenas “zerar” o elemento a_{32} para completar o escalonamento. Observemos que, se dividirmos a segunda linha por 2 e somarmos o resultado com a terceira linha, iremos obter a_{32}=0.

Assim, façamos então L3 = L2/2 + L3

L3 = L2/2 + L3		
M = $\left\Vert \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\vert$	a_{31}=a_{21}/2+ a_{21} a_{31}=0/2 + 0 a_{31}=0 + 0 a_{31}=0	a_{32}=a_{22}/2+ a_{32} a_{32}=2/2 + (-1) a_{32}=1 - 1 a_{32}=0
a_{33}=a_{23}/2+ a_{33} a_{33}=-2/2 + (-1) a_{33}=-1 - 1	a_{34}=a_{24}/2+ a_{34} a_{34}=2/2 + 0 a_{34}=1 + 0	após L3...

L3 = L2/2 + L3		
a_{33}=-2	a_{34}=1	$M = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$

Agora, é só reescrever as equações do sistema a partir da matriz triangular superior. Vejamos:

```
x + y – z = 1
  -2y + 2z = -2
       -2z = 1
```

Resolvendo,

```
-2z = 1
z = -1/2
```

substituindo o valor calculado para **z** acima na segunda equação, temos:

```
-2y + 2z = -2
-2y + 2(-1/2) = -2
-2y - 1 = -2
-2y = -1
2y = 1
y = 1/2
```

substituindo os valores de **y** e **z** na primeira equação, podemos calcular o valor de **x**.

```
x + y – z = 1
x + ½ -(– ½) = 1
x + ½ + ½ = 1
x + 1 = 1
x = 1 – 1
x = 0
```

E o vetor solução do sistema é S = {0, ½,- ½}

Método de Eliminação de Gauss (pivotamento)

Esse método apresenta um algoritmo que poderá ser facilmente implementado em uma linguagem de programação. Veja abaixo a sistemática do método.

Inicialmente, deve-se transcrever o sistema na forma matricial, mais especificamente na forma de um produto de matrizes. É bem simples. Uma das matrizes é constituída pelos coeficientes das variáveis, a segunda matriz é constituída pelas variáveis e, a terceira matriz é constituída pelos termos independentes. Veja abaixo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$$

Criando a matriz expandida

O passo seguinte é criar a <u>**matriz expandida**</u> que é constituída pelos elementos da matriz dos coeficientes e pelos elementos da matriz dos termos independentes. Veja abaixo:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

É sobre a matriz expandida que o método do pivotamento é aplicado.

Eliminação de Gauss

A partir da *matriz expandida* aplica-se o método de eliminação de Gauss.

Veja abaixo:

Fase 1: Escolhe-se a linha que contenha o primeiro elemento da primeira coluna, diferente de zero. Caso o primeiro elemento seja nulo deve-se realizar a troca das linhas. As outras linhas permanecem onde estão. No exemplo, o elemento a_{11} é igual a 1 e portanto será utilizado. Esse valor passa a ser conhecido como **pivô** dessa fase. Todas as operações levarão em conta esse valor, daí o nome do método de pivotamento.

A matriz expandida fica da seguinte forma:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$$

Triangularização L2: aplica-se a sentença aritmética: $L2 = L2 - \frac{a21}{a11} * L1$

Fase 1: Triangularização L2		
$L2 = L2 - \frac{a21}{a11} * L1$	$a21 = a21 - \frac{a21}{a11} * a11$	a_{21} = 1 - (1/1)*1 a_{21} = 1 - (1)*1

Fase 1: Triangularização L2		
		a_{21} = 1 - (1) a_{21} = 1 - 1 a_{21} = 0
	$a22 = a22 - \frac{a21}{a11} * a12$	a_{22} = -1 - (1/1)*1 a_{22} = -1 - (1)*1 a_{22} = -1 - (1) a_{22} = -1 - 1 a_{22} = -2
	$a23 = a23 - \frac{a21}{a11} * a13$	a_{23} = 1 – (1/1)*-1 a_{23} = 1 – (1)*-1 a_{23} = 1 - (-1) a_{23} = 1 + 1 a_{23} = 2
	$a24 = a24 - \frac{a21}{a11} * a14$	a_{24} = -1 - (1/1)*1 a_{24} = -1 - (1)*1 a_{24} = -1 - (1) a_{24} = -1 - 1 a_{24} = -2

Triangularização L3: aplica-se a sentença aritmética: $L3 = L3 - \frac{a31}{a11} * L1$

Fase 1: Triangularização L3		
$L3 = L3 - \frac{a31}{a11} * L1$	$a31 = a31 - \frac{a31}{a11} * a11$	a_{31} = 2 - (2/1)*1 a_{31} = 2 - (2)*1 a_{31} = 2 - (2) a_{31} = 2 - 2 a_{31} = 0
	$a32 = a32 - \frac{a31}{a11} * a12$	a_{32} = 1 - (2/1)*1 a_{32} = 1 - (2)*1 a_{32} = 1 - (2) a_{32} = 1 - 2 a_{32} = -1
	$a33 = a33 - \frac{a31}{a11} * a13$	a_{33} = -3 – (2/1)*-1 a_{33} = -3 – (2)*-1 a_{33} = -3 - (-2) a_{33} = -3 + 2 a_{33} = -1
	$a34 = a34 - \frac{a31}{a11} * a14$	a_{34} = 2 - (2/1)*1 a_{34} = 2 - (2)*1 a_{34} = 2 - (2)

Fase 1: Triangularização L3		
		a_{34} = 2 - 2 a_{34} = 0

Assim, após as triangularizações L2 e L3 a matriz expandida fica da seguinte forma:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

Ok, a fase 1 encerra a primeira parte do escalonamento e a linha 1 já está pronta e não mais sofrerá operações. Resta ainda a segunda e a terceira linhas.

Fase 2: O elemento a_{22}=-2 e portanto diferente de 0 é o escolhido como sendo o segundo pivô. Repete-se o processo de triangularização realizado acima.

Fase 2: Triangularização L3		
$L3 = L3 - \frac{a32}{a22} * L2$	$a31 = a31 - \frac{a32}{a22} * a21$	a_{31} = 0 - (-1/-2)*0 a_{31} = 0 – (1/2)*0 a_{31} = 0 - (0) a_{31} = 0 - 0 a_{31} = 0
	$a32 = a32 - \frac{a32}{a22} * a22$	a_{32} = -1 - (-1/-2)*-2 a_{32} = -1 – (1/2)*-2 a_{32} = -1 - (-2/2) a_{32} = -1 + 1 a_{32} = 0
	$a33 = a33 - \frac{a32}{a22} * a23$	a_{33} = -1 - (-1/-2)*2 a_{33} = -1 – (1/2)*2 a_{33} = -1 - (2/2) a_{33} = -1 – (1) a_{33} = -1 – 1 a_{33} = -2
	$a34 = a34 - \frac{a32}{a22} * a24$	a_{34} = 0 - (-1/-2)*-2 a_{34} = 0 – (1/2)*-2 a_{34} = 0 - (-2/2) a_{34} = 0 + 1 a_{34} = 1

Desse modo, após a fase 2, a matriz apresenta-se da seguinte forma:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Ok, o sistema está escalonado. Reescrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Dessa forma, o sistema proposto foi transformado no seguinte sistema equivalente:

$$\begin{Vmatrix} x+y-z=1 \\ 0\mathrm{x}-2\mathrm{y}+2\mathrm{z}=-2 \\ 0\mathrm{x}+0\mathrm{y}-2\mathrm{z}=1 \end{Vmatrix}$$ isto é,

x + y − z = 1
-2y + 2z = -2
-2z = 1

Assim,

-2z = 1 portanto z = -1/2

substituindo esse valor de z na equação -2y + 2z = -2, temos:

-2y + 2z = -2
-2y + 2*(-1/2) = -2
-2y – 2/2 = -2
-2y -1 = -2
-2y = -2 + 1
-2y = -1 portanto y = 1/2

finalmente, substituindo os valores de y e z na equação x + y – z = 1, temos:

x + y – z = 1
x + ½ – (-½) = 1
x + ½ + ½ = 1
x + 1 = 1 portanto x = 0 Assim, S = {0, ½ , -½ }

That's All Folks!

by fernandopaim@paim.pro.br