

# Problema 1

Calcular a matriz inversa da matriz  $A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

## Resolução

Bom, para se resolver exercícios que envolvem o cálculo de matrizes inversas é necessário partir de algumas definições básicas. Assim, há duas restrições que uma dada matriz deverá obedecer para que seja possível calcular a sua inversa. Essas duas restrições são:

1. Matrizes inversas só são definidas para matrizes quadradas.
2. Para que exista a matriz inversa de uma dada matriz, o determinante dessa matriz dada deverá ser diferente de zero.

No caso do exemplo acima, a matriz **A** é de ordem **3x3**, isto é, trata-se de uma matriz quadrada. Dessa forma, a primeira restrição acima é satisfeita. Para verificar se a matriz satisfaz a segunda condição é necessário calcular o seu determinante.

## Calculando o determinante da matriz dada

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

aplicando a “regra de Sarrus” para o cálculo de determinantes de terceira ordem, temos:

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

efetuando os cálculos, temos:

$$\text{Det}(A) = (-2*1*1) + (0*-1*1) + (0*1*0) - (0*1*1) - (-2*-1*0) - (0*1*1)$$

$$\text{Det}(A) = (-2) + (0) + (0) - (0) - (0) - (0)$$

$$\text{Det}(A) = -2$$

logo,

$$\boxed{\text{Det}(A) = -2}$$

Assim, uma vez que o determinante da matriz dada é -2 e portanto, diferente de zero, logo existe a matriz inversa.

### Calculando a matriz inversa

A notação da inversa de uma dada matriz  $A$  é dada por  $A^{-1}$

A matriz inversa é dada por: 
$$A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot [\text{Cof}(A)]^t$$

onde,

- $A^{-1}$  é a matriz inversa.
- $\text{Det}(A)$  é o determinante da matriz dada. Já calculado acima e vale 9.
- $\text{Cof}(A)$  é a matriz dos co-fatores da matriz dada.
- A letra  $t$  indica que deve-se tomar a matriz transposta da matriz dos co-fatores de  $A$ .

### Matriz dos Co-fatores

Chama-se matriz dos co-fatores de uma dada matriz  $A$ , e indica-se por **Cof(A)**, a matriz que se obtém a partir da matriz  $A$ , substituindo-se cada elemento de  $A$  pelo seu respectivo co-fator. Muito bem! e o que é co-fator de um elemento??

### Co-fator de um elemento

O co-fator de um elemento de uma dada matriz  $A$  é dado por:  $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{Det}(R_{ij})$

onde,

- $a_{ij}$  é o elemento do qual se deseja calcular o co-fator
- $i$  é a linha do elemento  $a_{ij}$
- $j$  é a coluna do elemento  $a_{ij}$
- $R_{ij}$  é a **matriz reduzida** que se obtém a partir da matriz dada  $A$  suprimindo-se a linha  $i$  e a coluna  $j$  do elemento  $a_{ij}$ . *Note que, o valor importante aqui não é a matriz reduzida em si mas, o seu determinante.*

### Calculando os co-fatores dos elementos

Do exposto acima, vamos calcular os co-fatores dos elementos da matriz:

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a definição de co-fator,  $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \text{Det}(R_{ij})$ , para cada um dos elemento da matriz, temos:

$R(a_{11})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{11}) = (-1)^{1+1} * \text{Det}(R_{11})$ $\text{Cof}(a_{11}) = (-1)^2 \{ (1 * 1) - (-1 * 0) \}$ $\text{Cof}(a_{11}) = 1 * \{ (1) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{11}) = \{ 1 - 0 \}$ $\text{Cof}(a_{11}) = 1$
$R(a_{12})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{12}) = (-1)^{1+2} * \text{Det}(R_{12})$ $\text{Cof}(a_{12}) = (-1)^3 * \{ (1 * 1) - (-1 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{12}) = -1 * \{ (1) - (-1) \}$ $\text{Cof}(a_{12}) = -1 * \{ (1+1) \}$ $\text{Cof}(a_{12}) = -1 * \{ 2 \}$ $\text{Cof}(a_{12}) = -2$
$R(a_{13})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3} * \text{Det}(R_{13})$ $\text{Cof}(a_{13}) = (-1)^4 * \{ (1 * 0) - (1 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{13}) = 1 * \{ (0) - (1) \}$ $\text{Cof}(a_{13}) = 1 * \{ -1 \}$ $\text{Cof}(a_{13}) = -1$
$R(a_{21})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{21}) = (-1)^{2+1} * \text{Det}(R_{21})$ $\text{Cof}(a_{21}) = (-1)^3 * \{ (0 * 1) - (0 * 0) \}$ $\text{Cof}(a_{21}) = -1 * \{ (0) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{21}) = -1 * \{ 0 \}$ $\text{Cof}(a_{21}) = -1 * 0$ $\text{Cof}(a_{21}) = 0$
$R(a_{22})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{22}) = (-1)^{2+2} * \text{Det}(R_{22})$ $\text{Cof}(a_{22}) = (-1)^4 * \{ (-2 * 1) - (0 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{22}) = 1 * \{ (-2) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{22}) = 1 * \{ -2 - 0 \}$ $\text{Cof}(a_{22}) = 1 * \{ -2 \}$ $\text{Cof}(a_{22}) = -2$
$R(a_{23})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{23}) = (-1)^{2+3} * \text{Det}(R_{23})$ $\text{Cof}(a_{23}) = (-1)^5 * \{ (-2 * 0) - (0 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{23}) = -1 * \{ (0) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{23}) = -1 * \{ 0 \}$ $\text{Cof}(a_{23}) = -1 * 0$ $\text{Cof}(a_{23}) = 0$
$R(a_{31})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{31}) = (-1)^{3+1} * \text{Det}(R_{31})$ $\text{Cof}(a_{31}) = (-1)^4 * \{ (0 * -1) - (0 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{31}) = 1 * \{ (0) - (-0) \}$ $\text{Cof}(a_{31}) = 1 * \{ 0 - 0 \}$ $\text{Cof}(a_{31}) = 1 * 0$ $\text{Cof}(a_{31}) = 0$
$R(a_{32})$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2} * \text{Det}(R_{32})$ $\text{Cof}(a_{32}) = (-1)^5 * \{ (-2 * -1) - (0 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{32}) = -1 * \{ (+2) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{32}) = -1 * \{ 2 - 0 \}$

			$\text{Cof}(a_{32}) = -1 * (2)$ $\text{Cof}(a_{32}) = -2$
R(a <sub>33</sub> )	$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\text{Cof}(a_{33}) = (-1)^{3+3} * \text{Det}(R_{32})$ $\text{Cof}(a_{33}) = (-1)^6 * \{ (-2 * 1) - (0 * 1) \}$ $\text{Cof}(a_{33}) = 1 * \{ (-2) - (0) \}$ $\text{Cof}(a_{33}) = 1 * \{ -2 \}$ $\text{Cof}(a_{33}) = 1 * (-2)$ $\text{Cof}(a_{33}) = -2$

### Criando a Matriz dos co-fatores

Ok, uma vez que todos os co-fatores dos elementos foram calculados, pode-se escrever a matriz dos cofatores.

Veja abaixo:

Matriz dos co-fatores da matriz dada A:

$$\text{Cof}(A) = \begin{matrix} \text{cof}(a_{11}) & \text{cof}(a_{12}) & \text{cof}(a_{13}) & 1 & -2 & -1 \\ \text{cof}(a_{21}) & \text{cof}(a_{22}) & \text{cof}(a_{23}) & 0 & -2 & 0 \\ \text{cof}(a_{31}) & \text{cof}(a_{32}) & \text{cof}(a_{33}) & 0 & -2 & -2 \end{matrix}$$

Note que, na expressão  $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot [\text{Cof}(A)]^t$  usada para se calcular os elementos da matriz inversa  $A^{-1}$ , o fator importante é a transposta da matriz dos co-fatores e não propriamente a matriz dos co-fatores. Lembramos que a transposta de uma dada matriz é obtida trocando-se linhas por colunas. Assim sendo,

$$\text{Cof}(A)^t = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{matrix}$$

Para obter a matriz inversa basta dividir todos os elementos pelo determinante da matriz dada A,  $\text{Det}(A)=-2$ .

Assim:

$$A^{-1} = \begin{matrix} 1/-2 & 0/-2 & 0/-2 & -0.5 & 0 & 0 \\ -2/-2 & -2/-2 & -2/-2 & 1 & 1 & 1 \\ -1/-2 & 0/-2 & -2/-2 & 0.5 & 0 & 1 \end{matrix} \text{ que é a solução do problema.}$$

Para se certificar-se de que a resposta encontrada está correta, basta multiplicar essa matriz pela matriz dada. O produto deverá apresentar como resultado a matriz identidade de ordem 3. Essa prova ficará como atividade

pra você fazer.

**Apêndice:**

Veja abaixo, todas as matrizes reduzidas da matriz dada.

$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$
$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$
$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} \hline -2 & 0 & 0 & \hline 1 & 1 & -1 & \hline 1 & 0 & 1 & \hline \end{array}$

*That's All Folks!*

by [fernandopaim@paim.pro.br](mailto:fernandopaim@paim.pro.br)